

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Механика и конструирование машин»

СТАТИКА

**Учебно-методическое пособие
для выполнения контрольных работ
по теоретической механике
для студентов заочной формы обучения**

**УФА
2010**

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с государственным образовательным стандартом дисциплины «Теоретическая механика», преподаваемой в технических вузах студентам заочной формы обучения. Пособие поможет обучающимся закрепить теоретический материал и оценить свои знания по разделу теоретической механики «Статика твердого тела». В пособии приведена краткая теория и примеры решения задач.

Составители: Садыков В.А., проф., канд. техн. наук
Имаева Э.Ш., доц., канд. техн. наук

Рецензент Загорский В.К., проф., д-р техн. наук

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Краткая теория раздела «Статика» курса теоретической механики	5
1.1 Аксиомы статики	5
1.2 Связи и их реакции	6
1.3 Проекция силы на ось	12
1.4 Момент силы относительно точки	13
1.5 Теорема Вариньона	15
1.6 Момент силы относительно оси	15
1.7 Пара сил	17
1.8 Распределенные нагрузки	19
1.9 Уравнения равновесия системы сил	21
2 Решение задач на равновесие системы сил	23
2.1 Равновесие системы сходящихся сил	23
2.1.1 Примеры решения задач на равновесие системы сходящихся сил	25
2.2 Равновесие произвольной плоской системы сил	29
2.2.1 Примеры решения задач на равновесие системы сил в плоскости	29
2.2.2 Примеры решения задач на равновесие составных конструкций	31
2.3 Равновесие произвольной пространственной системы сил	36
2.3.1 Примеры решения задач на равновесие пространственной системы сил	36
2.4 Равновесие с учетом сил трения	41
2.4.1 Примеры решения задач на равновесие с учетом сил трения	43
3 Рекомендуемая литература	46
Список использованных источников	47

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для оказания методической помощи студентам при выполнении контрольных работ и расчетно-графических заданий по разделу «Статика» дисциплины «Теоретическая механика». В пособии приведены аксиомы статики, основные понятия и определения статики твердого тела, подробно разобраны примеры решения задач на равновесие твердого тела. Данное пособие не исключает изучение курса по учебникам, в которых более подробно изложены основные понятия, определения, доказательства теорем, что способствует развитию логического мышления и более успешному закреплению материала, необходимого для изучения других разделов курса теоретической механики и родственных дисциплин («Сопротивление материалов», «Детали машин» и т.д.).

1 КРАТКАЯ ТЕОРИЯ РАЗДЕЛА «СТАТИКА» КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В окружающем нас пространстве тела могут перемещаться или покоиться, т.е. находиться в равновесии. В разделе «Статика» устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу. Исходя из этих условий рассчитываются опоры различных конструкций, сооружений, механизмов. Основой для всех теорем являются аксиомы статики.

1.1 АКСИОМЫ СТАТИКИ

1 Аксиома инерции

Под действием уравновешенной системы сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

2 Аксиома равновесия двух сил

Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

3 Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил

Не нарушая состояния абсолютно твердого тела, к нему можно прикладывать или отбрасывать от него уравновешенную систему сил.

4 Аксиома параллелограмма сил

Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, проходящую через эту точку и равную их геометрической сумме.

5 Аксиома равенства действия и противодействия

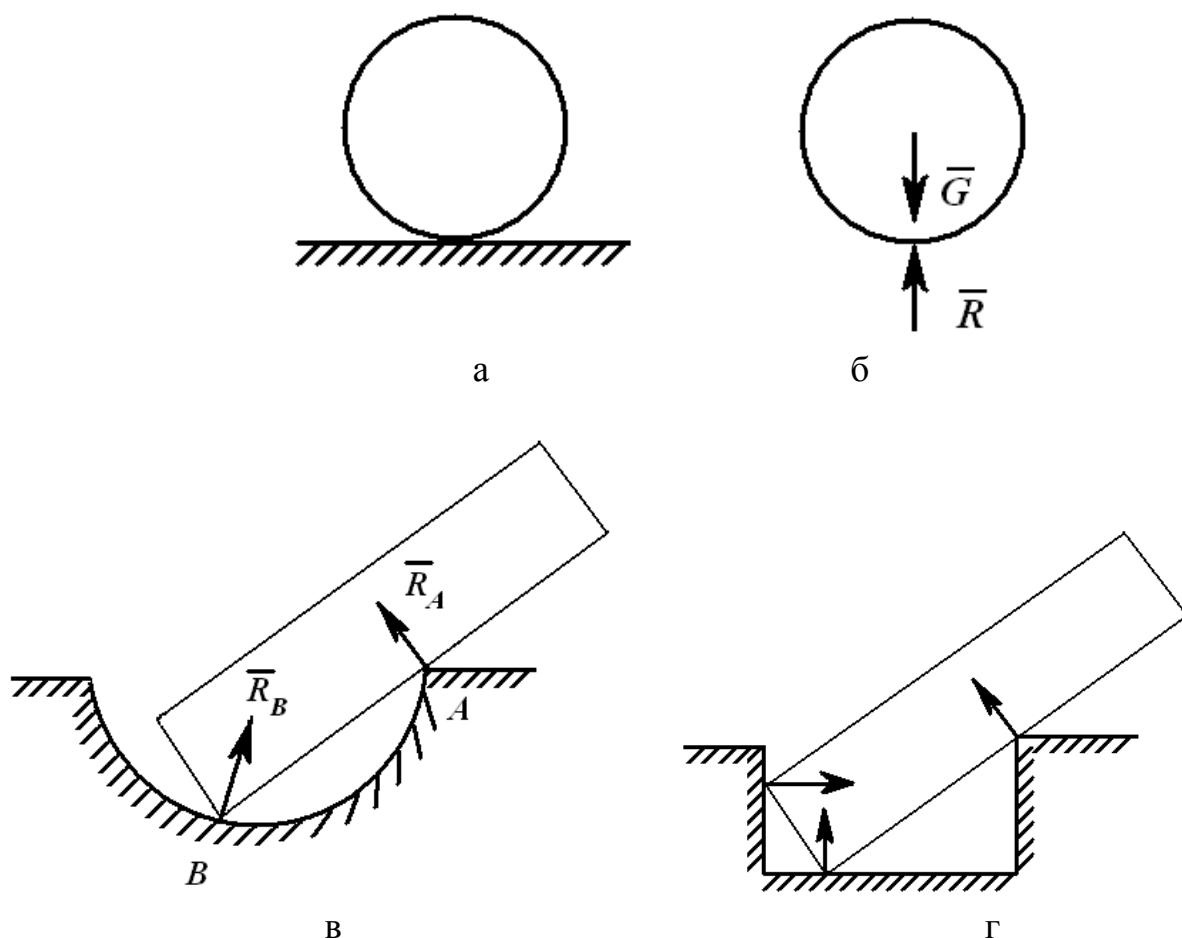
Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

6 Аксиома о сохранении равновесия сил, приложенных к деформируемому телу

Равновесие деформируемого тела не нарушится, если это тело отвердеет.

1.2 СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

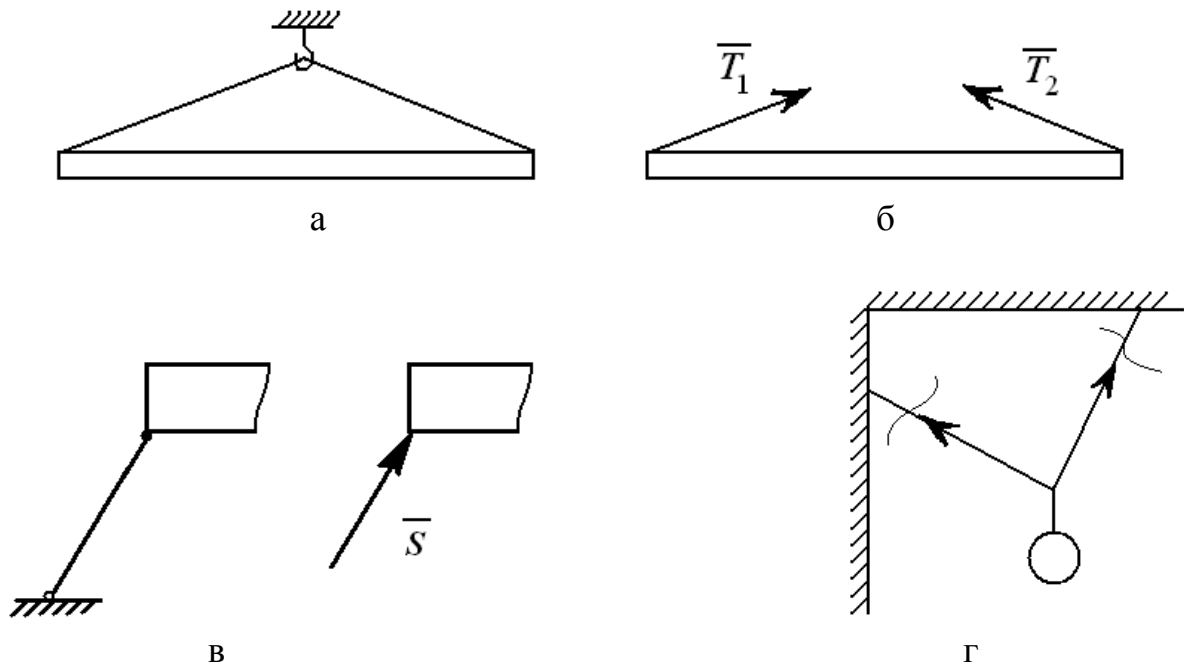
Тела в природе бывают свободными и несвободными. Тела, свобода перемещения которых ничем не ограничена, называются свободными. Тела, ограничивающие свободу перемещения других тел, называются по отношению к ним связями. Одним из основных положений механики является принцип освобождения от связей, согласно которому несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить действующие на него связи и заменить их силами – реакциями связей. Очень важно правильно расставить реакции связей, иначе написанные уравнения окажутся неверными. Ниже приведены примеры замены связей их реакциями. На рисунках 1.1–1.8 показаны примеры замены связей их реакциями.



- а – тело весом $\vec{G}$ на гладкой поверхности;
 б – действие поверхности заменено реакцией – силой $\vec{R}$;
 в – в точке A связь «опорная точка» или ребро;
 г – реакции направлены перпендикулярно
 опираемой или опирающейся плоскостям

Рисунок 1.1

Реакция гладкой поверхности всегда направлена по нормали к этой поверхности (рисунок 1.1). Реакция «невесомого» троса (нити, цепи, стержня) всегда направлена вдоль троса (нити, цепи, стержня) (рисунок 1.2).



а – балка висит на двух тросах;
 б – действие тросов заменено силами $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$;
 в – связь «идеальный стержень»;
 г – связь «идеальная нить»

Рисунок 1.2

Шарнирно-неподвижная опора может изображаться по-разному (рисунок 1.3, а или 1.3, б). Она может быть заменена либо силой $\overline{R}$ с углом α (рисунок 1.3, в), либо двумя силами, например, $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ (рисунок 1.3, г).

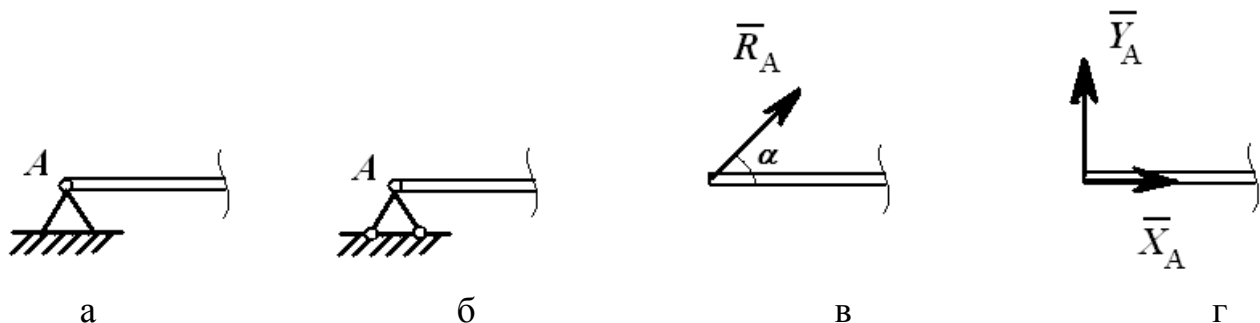


Рисунок 1.3

Всегда можно перейти от R и α к X_A и Y_A (и наоборот):

$$X_A = R \cos \alpha; \quad Y_A = R \sin \alpha;$$

$$R = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad \frac{X_A}{R} = \cos \alpha; \quad \frac{Y_A}{R} = \sin \alpha. \quad (1.1)$$

Шарнирно-подвижная опора (рисунок 1.4, а) допускает (в данном случае) горизонтальное перемещение и не допускает вертикальное. Реакция направлена по нормали к опорной поверхности (рисунок 1.4, б).

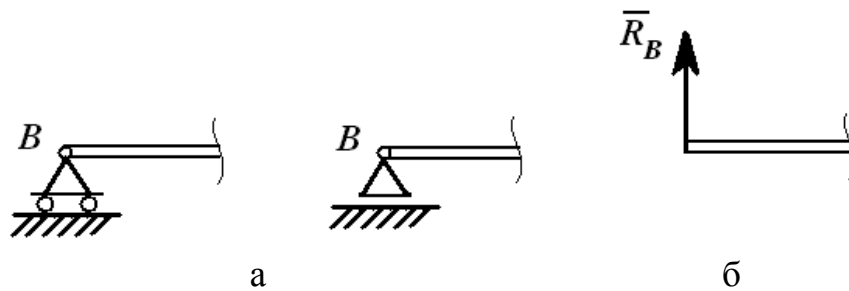


Рисунок 1.4

Связи шарнирно-неподвижной опоры в точке A и шарнирно-подвижной опоры в точке B отброшены (рисунок 1.5, б), их действие заменено силами X_A , Y_A и R_B .

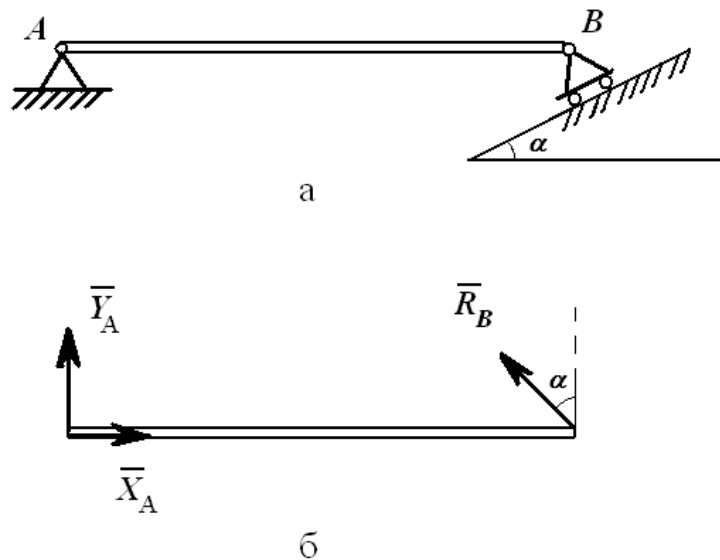


Рисунок 1.5

Соединение стержня и втулки в плоскости (рисунок 1.6) – скользящая заделка. Отбросим втулку – получим действие на стержень силы R_D и момента M_D .

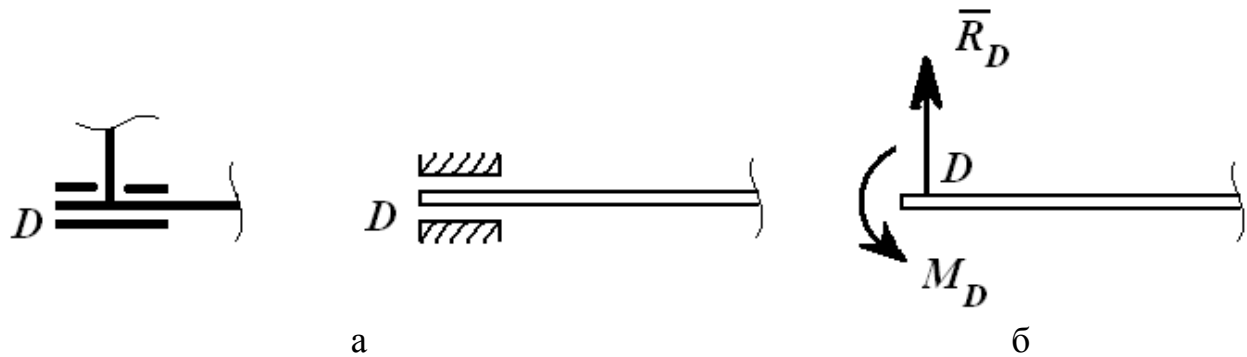


Рисунок 1.6

На рисунке 1.7, а изображена бискользящая заделка. В плоскости данная опора допускает поступательное перемещение стержня как по горизонтали, так и по вертикали, но препятствует повороту (в плоскости). Реакцией такой опоры будет момент M_C (рисунок 1.7, б).

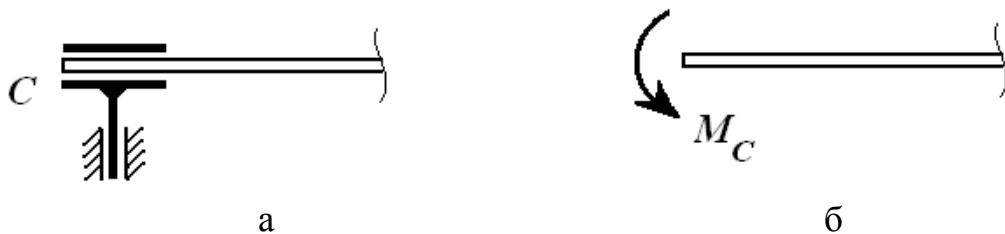


Рисунок 1.7

Консоль (глухая или жесткая заделка) не допускает никакого перемещения детали. Реакцией такой опоры являются неизвестная по величине и направлению сила R_A с углом α (или X_A и Y_A) и момент M_A (рисунок 1.8).

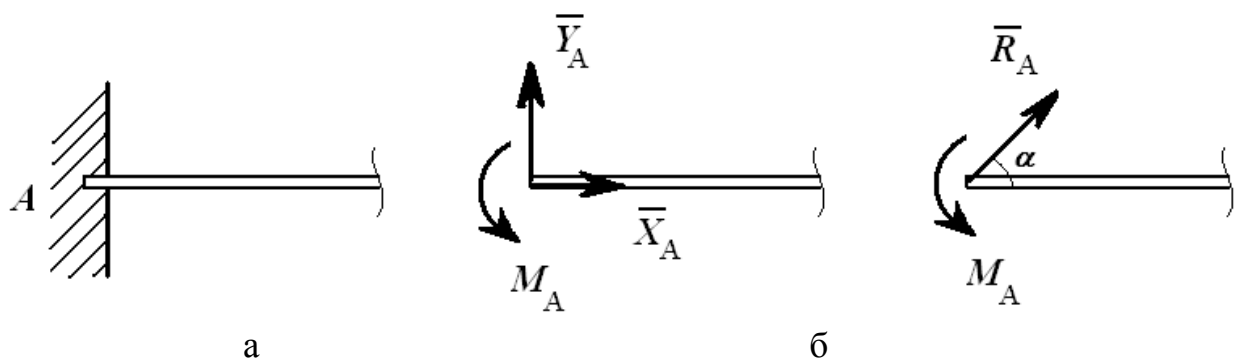


Рисунок 1.8

На рисунках 1.9–1.15 показаны примеры замены связей их реакциями. Шарнирно-неподвижная опора, или сферический шарнир (рисунок 1.9, а), заменена системой сил (рисунок 1.9, б) X_A , Y_A и Z_A , т.е. силой, неизвестной по величине и направлению.

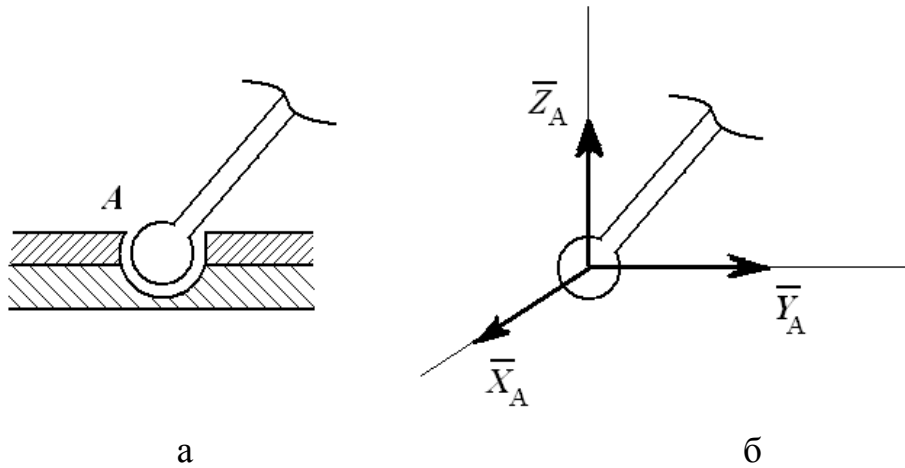


Рисунок 1.9

На рисунке 1.10, а показан вал, закрепленный в опорах: в точке **A** – подпятник или стакан, в точке **B** – втулка или подшипник. Действие опор заменено силами X_A , Y_A , Z_A и X_B , Z_B (рисунок 1.10, б).

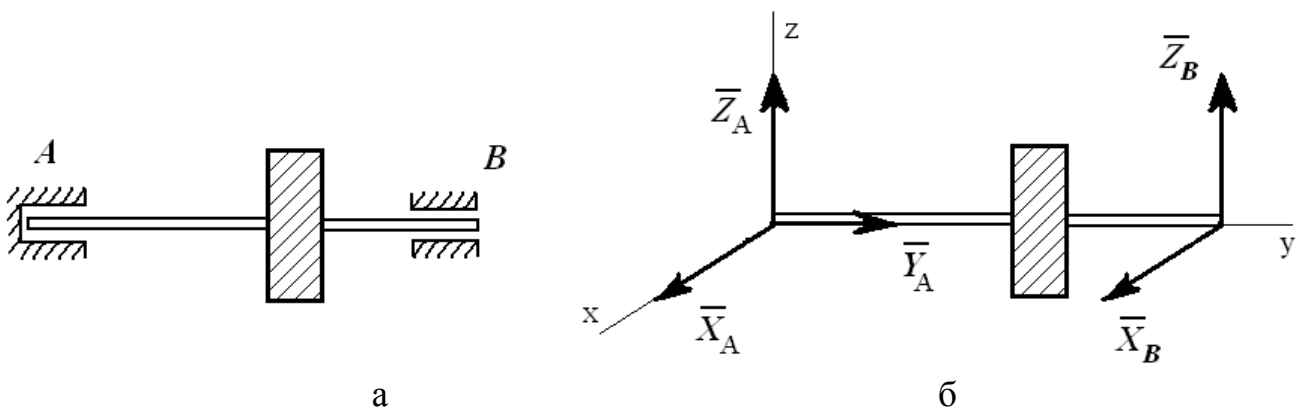


Рисунок 1.10

На рисунках 1.11 и 1.12 приведены примеры замены различных связей их реакциями.

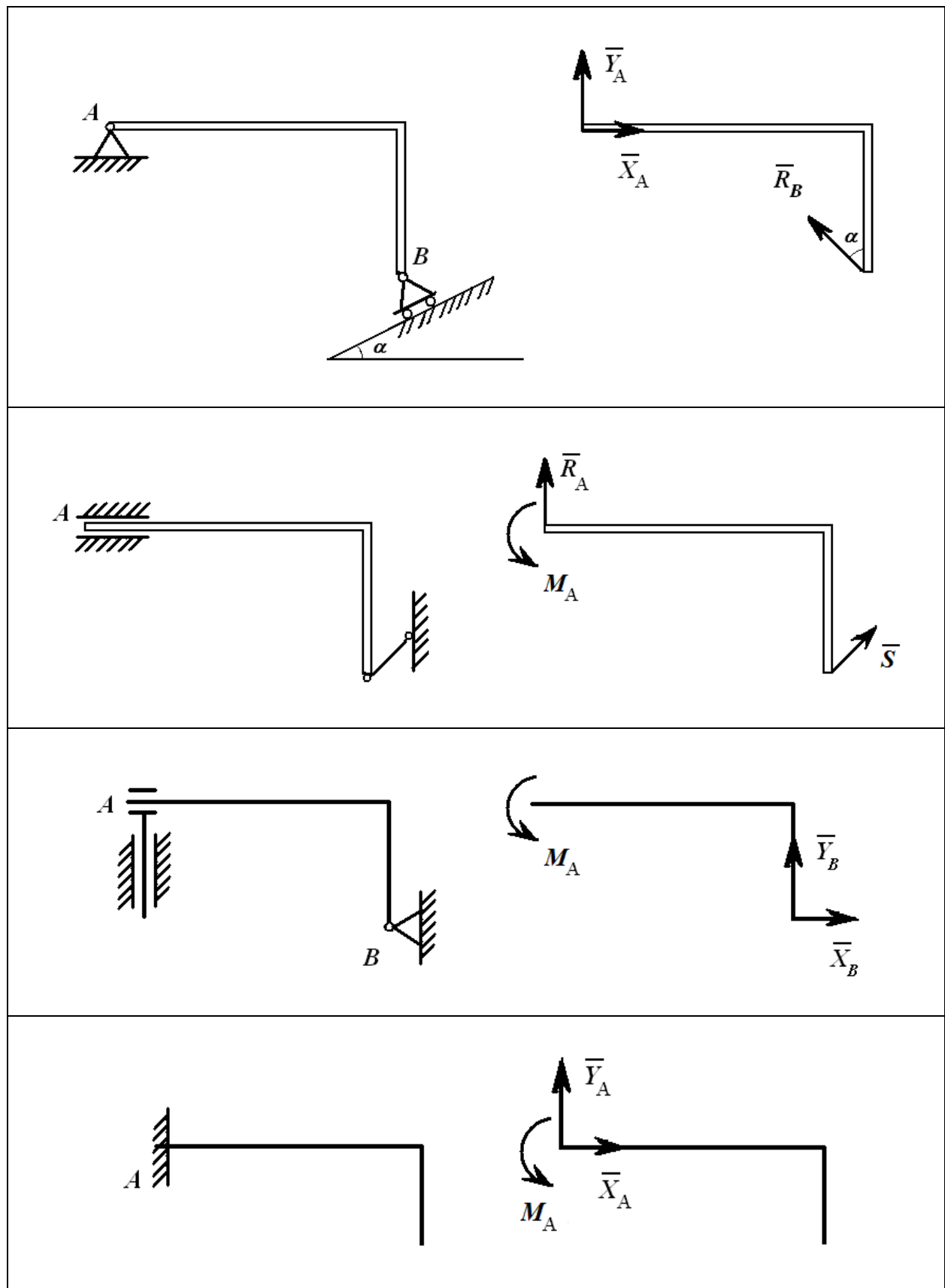


Рисунок 1.11

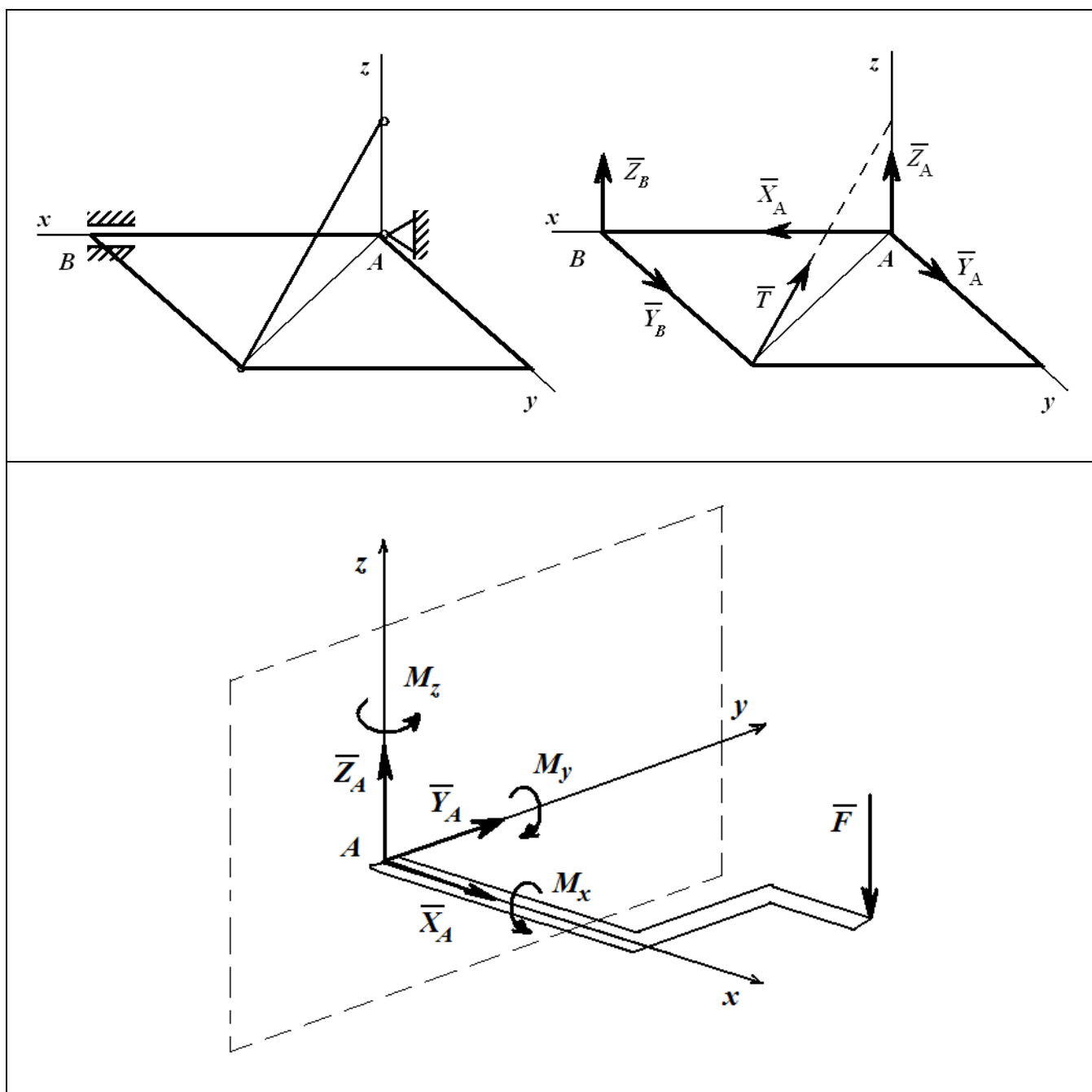


Рисунок 1.12

1.3 ПРОЕКЦИЯ СИЛЫ НА ОСЬ

Проекция силы на ось – это алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между положительным направлением оси и вектором силы (это отрезок, откладываемый на оси; рисунок 1.13):

$$F_x = F \cos \alpha; P_x = P \cos \beta = P \cdot \cos 90^\circ = 0; R_x = R \cos \gamma = -R \cdot \cos(180 - \gamma). \quad (1.2)$$

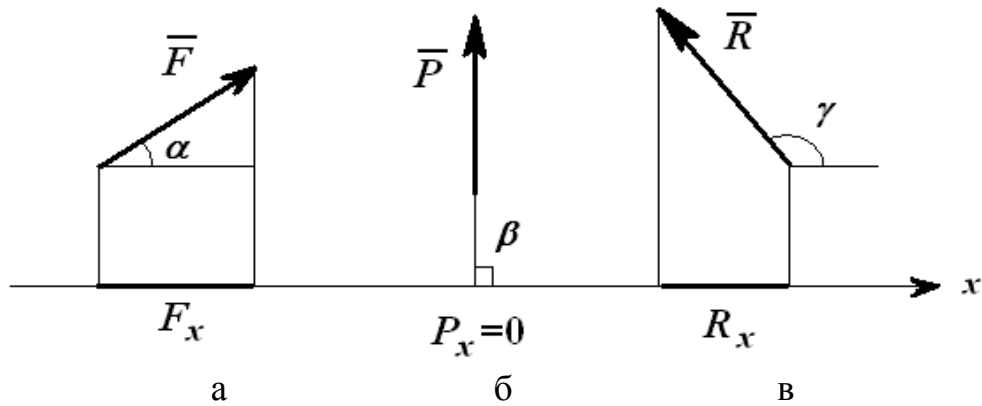


Рисунок 1.13

Проекция силы на ось может быть положительной ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$), равной нулю ($\beta = \frac{\pi}{2}$) и отрицательной ($\frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi$).

Иногда для нахождения проекции силы на ось сначала нужно найти ее проекцию на плоскость, а потом проекцию на ось (рисунок 1.14):

$$P_x = (P \cos \alpha) \cos \beta; \quad P_y = (P \cos \alpha) \cos \gamma = P \cos \alpha \cdot \cos(90 - \beta). \quad (1.3)$$

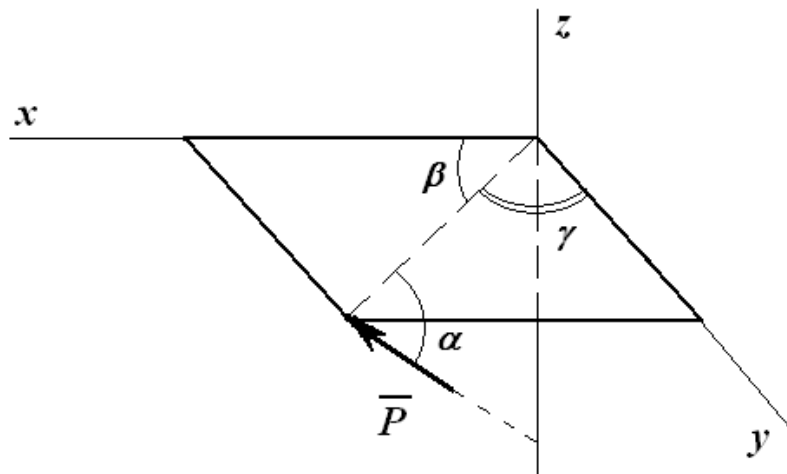


Рисунок 1.14

1.4 МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Моментом силы относительно точки O называется результат векторного произведения радиуса-вектора, проведенного из точки O в точку приложения силы, на вектор силы:

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (1.4)$$

Вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ (рисунок 1.15) перпендикулярен плоскости, в которой лежат радиус-вектор $\vec{r}$ и вектор силы $\vec{F}$, и направлен так, что если смотреть навстречу ему, видно силу, стремящуюся повернуть плоскость, в которой она лежит, против хода часовой стрелки.

Численно момент силы равен

$$M_O = r \cdot F \sin \alpha; \quad r \cdot \sin \alpha = h; \quad M_O = Fh. \quad (1.5)$$

На рисунке 1.15 видно, что если силу перенести вдоль линии действия в другую точку, то величина и знак момента не изменятся:

$$M_O = r \cdot F \sin \alpha = r_1 \cdot F_1 \sin \alpha_1 = Fh = F_1 h. \quad (1.6)$$

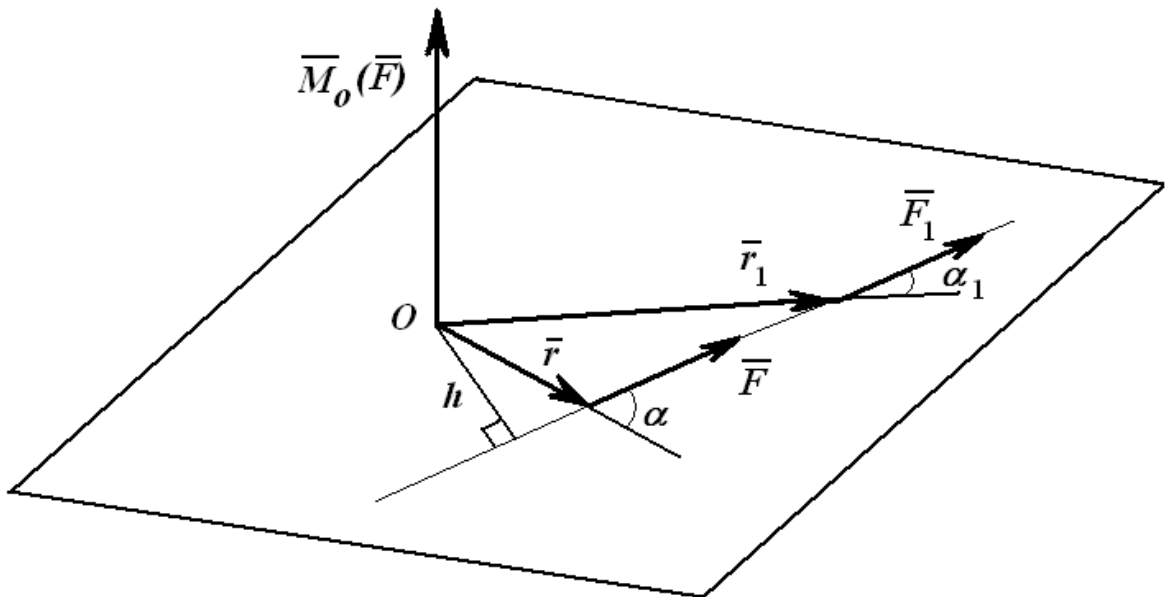
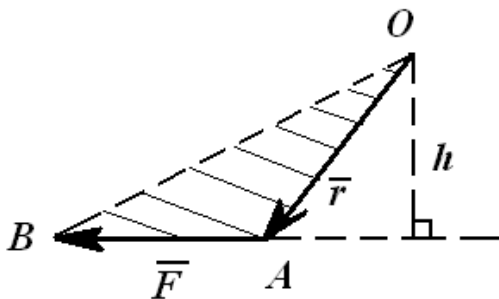


Рисунок 1.15

Можно также сказать, что численно момент силы относительно точки равен удвоенной площади треугольника (OAB), основанием которого является сила, а высотой – плечо h (рисунок 1.16):



$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} Fh; \quad M_O(\vec{F}) = Fh = 2S_{\Delta OAB}. \quad (1.7)$$

Рисунок 1.16

1.5 ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

В некоторых случаях при определении момента силы возникают трудности в расчете плеча силы. Решение вопроса упрощает **теорема Вариньона**, согласно которой **момент равнодействующей системы сил относительно какого-либо центра равен геометрической сумме моментов составляющих систему сил относительно того же центра.**

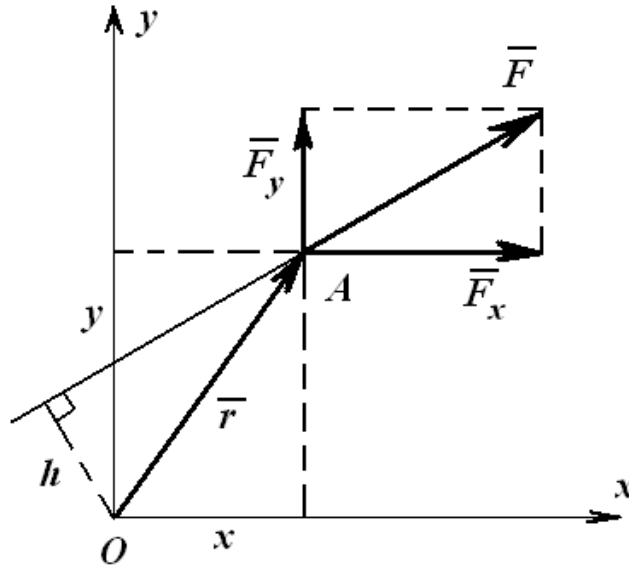


Рисунок 1.17

Например, момент силы $\vec{F}$ относительно точки O можно определить как алгебраическую сумму моментов сил F_x и F_y (на которые можно разложить силу F) относительно той же точки O (рисунок 1.17). То есть

$$M_O(\vec{F}) = -Fh = -F_x y + F_y x, \quad (1.8)$$

где F_x , F_y , x и y – проекции на оси координат силы $\vec{F}$ и радиуса-вектора $\vec{r}$.

1.6 МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Момент силы относительно оси, например Oz (рисунок 1.18), равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную этой оси ($\vec{F}'$) относительно точки пересечения оси с плоскостью, т.е.

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}') = F'h'. \quad (1.9)$$

Момент считается положительным, если мы смотрим навстречу оси и видим проекцию силы, стремящуюся повернуть плоскость чертежа в направлении против хода часовой стрелки.

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает ось, т.е. $h = 0$ (например $M_z(\bar{P})$), или сила параллельна оси, т.е. ее проекция на плоскость равна нулю, например, $M_z(\bar{Q})$. Момент силы относительно оси – скалярная величина.

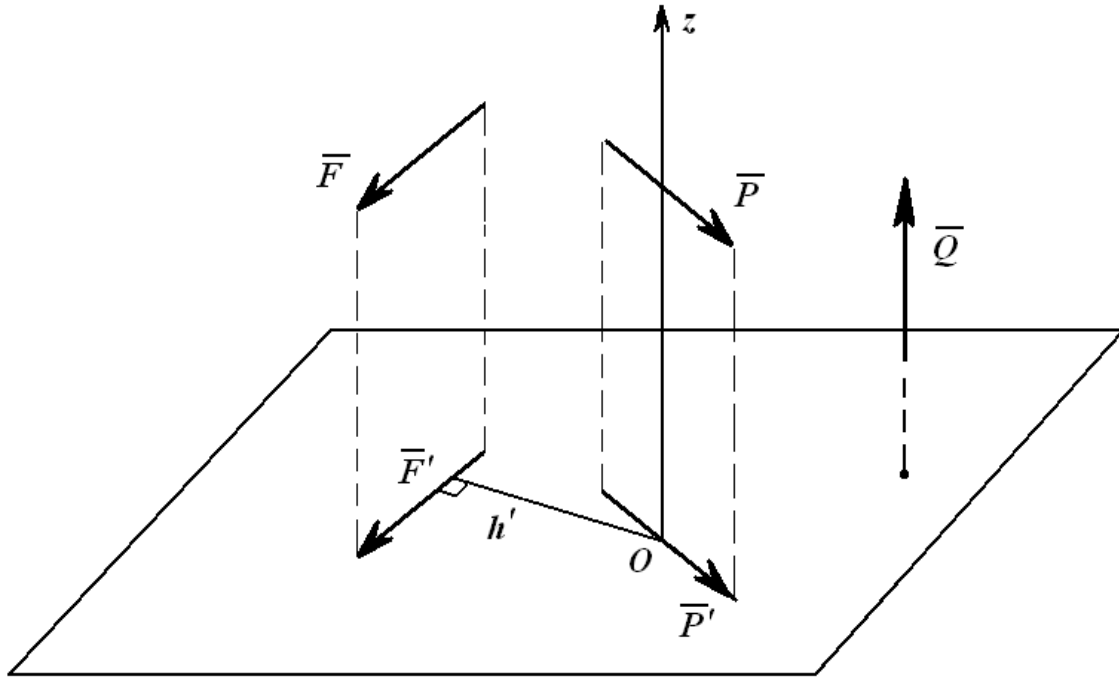


Рисунок 1.18

Моменты силы относительно координатных осей можно получить, расписав векторное произведение

$$\begin{aligned} \bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = \\ &= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \cdot \bar{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \cdot \bar{j} + (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \bar{k}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Величины, стоящие в скобках, представляют собой моменты силы $\bar{F}$ относительно соответствующих осей.

1.7 ПАРА СИЛ

Парой сил называется система двух равных по величине, противоположных по направлению и не лежащих на одной прямой сил (рисунок 1.19).

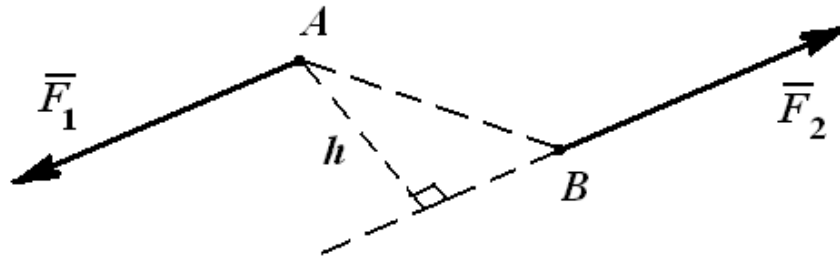


Рисунок 1.19

Пара сил не имеет равнодействующей, т.е. не может быть заменена одной силой. Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю, т.к. их проекции всегда равны и противоположны по знаку (рисунок 1.20).

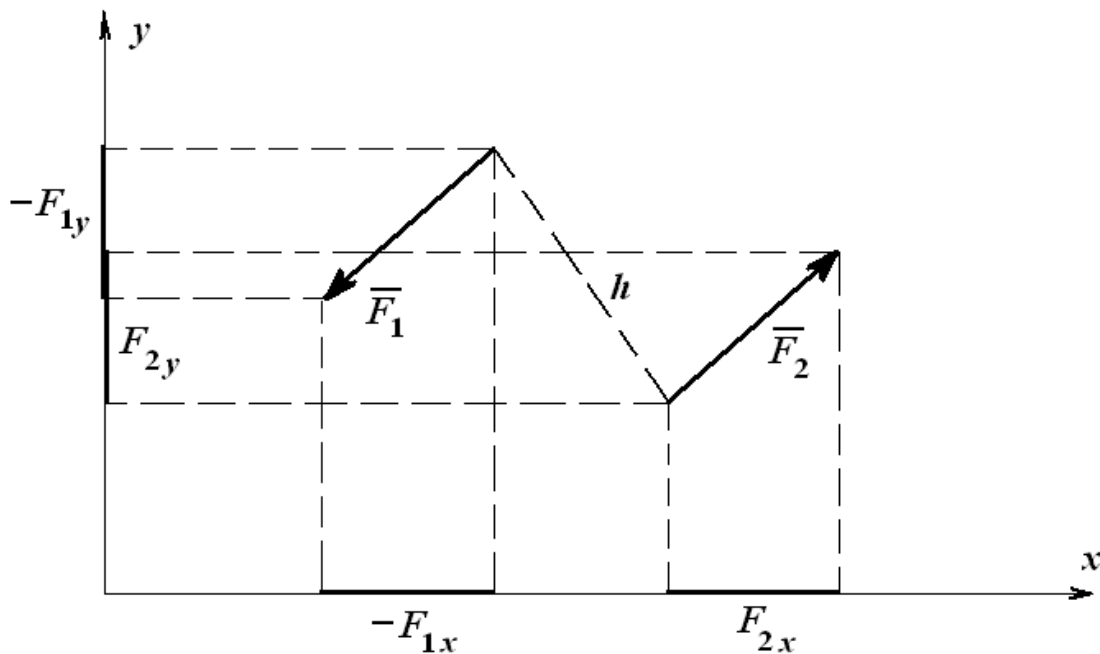


Рисунок 1.20

Пара сил оказывает вращающее действие, которое может быть оценено моментом пары:

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = F_1 h = F_2 h, \quad (1.11)$$

где h – плечо пары.

Момент пары считается положительным, если силы пары стремятся повернуть плоскость, в которой они расположены, против хода часовой стрелки (рисунки 1.19, 1.20 – моменты этих пар сил положительны). Момент пары сил может быть определен как векторная величина:

$$\overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = \overline{AB} \times \overline{F}_2 = \overline{BA} \times \overline{F}_1, \quad (1.12)$$

т.е. вектор $\overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ всегда перпендикулярен плоскости, в которой расположена пара сил, и его направление определяется правилом векторного произведения (рисунок 1.21). В разделе «Статика» дисциплины «Теоретическая механика» доказывается теорема о том, что сумма моментов сил пары относительно произвольной точки пространства равна моменту этой пары. Следовательно, вектор-момент пары сил может быть приложен (или перенесен) к любой точке твердого тела, на которое действует пара сил.

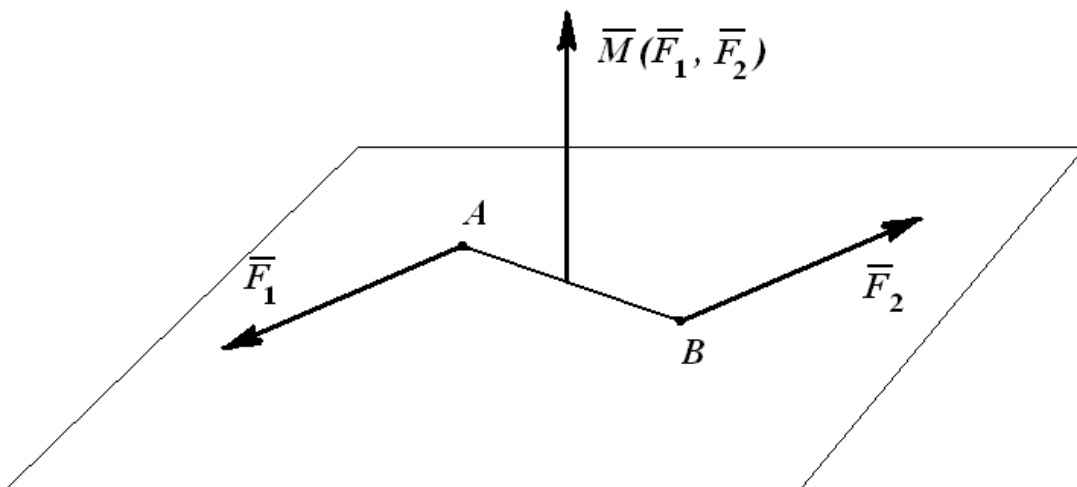


Рисунок 1.21

Поскольку действие пары сил оценивается величиной и направлением вращающего момента, то на плоскости пару сил изображают в любом месте твердого тела, задавая величину и направление вращающего действия (см. на рисунке 1.22 изображение пар сил M_1 и M_2).

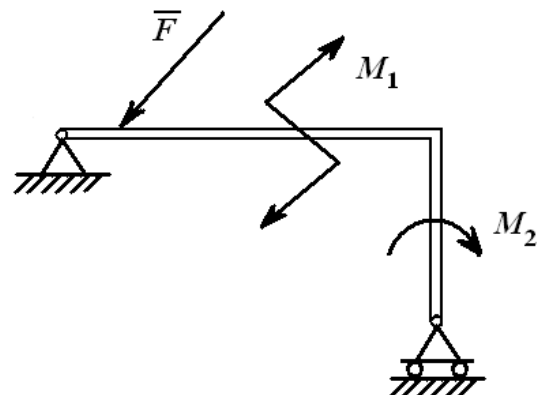


Рисунок 1.22

1.8 РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НАГРУЗКИ

Воздействие на детали, конструкции, элементы механизмов может быть задано распределенными нагрузками: в плоской системе задается интенсивность действия по длине конструкции, в пространственной системе – по площади.

Например, на рисунке 1.23, а приведена равномерно распределенная по длине AB нагрузка интенсивностью q , измеряемая в Н/м. Эта нагрузка может быть заменена сосредоточенной силой $Q = q \cdot AB$ [Н], приложенной в середине отрезка AB . На рисунке 1.23, б показана равномерно убывающая (возрастающая) нагрузка, которая может быть заменена силой $Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot AB$, приложенной в точке C , причем $AC = \frac{2}{3} AB$.

В произвольном случае, зная функцию $q(x)$ (рисунок 1.23, в), рассчитываем

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx. \quad (1.13)$$

Эта сила приложена в центре тяжести площади, ограниченной сверху от балки AB линией $q(x)$.

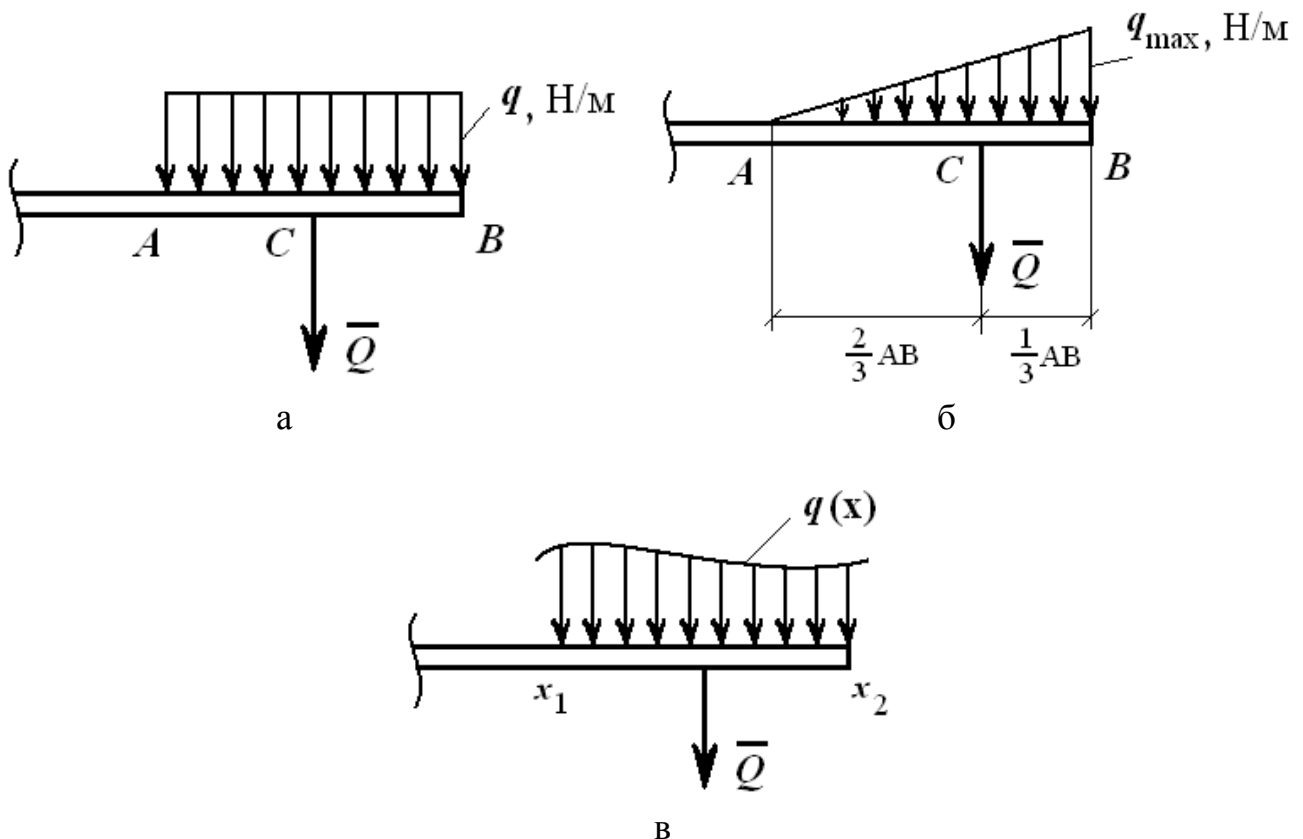


Рисунок 1.23

Примером может служить расчет усилий, разрывающих стенки баллона со сжатым газом. Определим результирующую силу давления в секторе трубы при интенсивности q [Н/м]; R – радиус трубы, 2α – центральный угол, ось Ox – ось симметрии (рисунок 1.24).

Выделим элемент сектора с углом $\Delta\varphi$ и определим силу ΔQ , действующую на плоский элемент дуги:

$$\Delta Q = q \cdot \Delta l = q \cdot R \cdot \Delta\varphi. \quad (1.14)$$

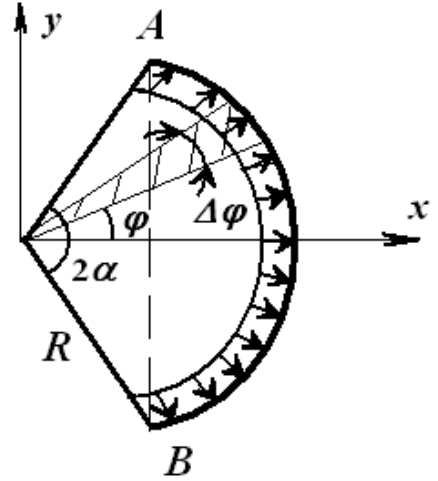


Рисунок 1.24

Проекция этой силы на ось Ox будет

$$\Delta Q_x = q \cdot R \cdot \Delta\varphi \cdot \cos\varphi. \quad (1.15)$$

В силу симметрии элемента трубы (с дугой AB) относительно оси Ox проекция результирующей силы на ось Oy

$$Q_y = 0, \quad \text{т.е. } Q = Q_x, \quad (1.16)$$

$$Q_x = \sum \Delta Q_x, \quad Q_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} q R \cos\varphi d\varphi = q R \sin\varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2q R \sin\alpha = q \cdot AB, \quad (1.17)$$

где AB – хорда, стягивающая концы дуги.

Для цилиндрической емкости высотой h и внутренним давлением P на стенки действует нагрузка интенсивностью $q = p$ [Н/м²]. Если цилиндр рассечен по диаметру (рисунок 1.25), то равнодействующая этих сил равна $F = q \cdot d \cdot h$ (d – внутренний диаметр); $F = p \cdot 2R \cdot h$.

Разрывающие баллон по диаметру усилия:

$$S_1 = S_2 = S; \quad 2S = F; \quad S = phR. \quad (1.18)$$

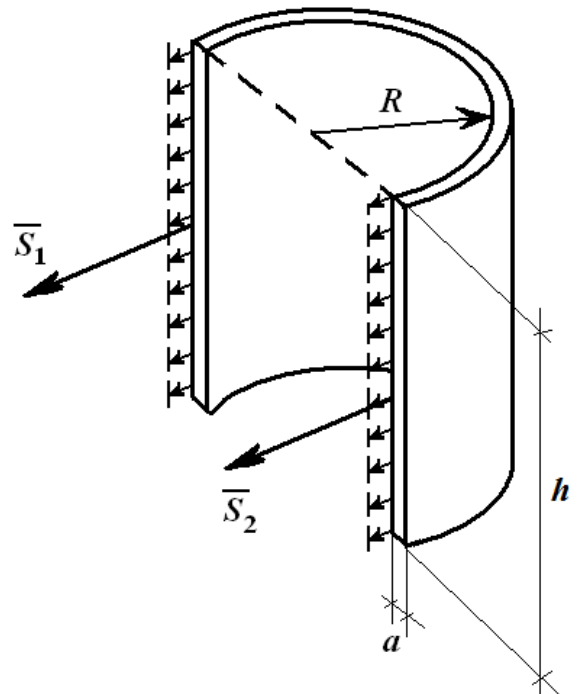


Рисунок 1.25

Если принять a – толщина стенки, то (пренебрегая усилиями в крышке и дне цилиндра) растягивающее напряжение в стенке равно

$$\sigma = \frac{S}{a \cdot h} = \frac{phR}{ah} = p \frac{R}{a}. \quad (1.19)$$

1.9 УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СИЛ

Из основной теоремы статики следует, что любая система сил и моментов, действующих на твердое тело, может быть приведена к выбранному центру и заменена в общем случае **главным вектором** и **главным моментом**. Если система уравновешена, то получаем условия равновесия: $\bar{\mathbf{R}} = 0$, $\bar{\mathbf{M}}_O = 0$. Из этих условий для пространственной системы сил получается шесть уравнений равновесия, из которых могут быть определены шесть неизвестных:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0, & \sum M_{ix} &= 0; \\ \sum y_i &= 0, & \sum M_{iy} &= 0; \\ \sum z_i &= 0, & \sum M_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Для плоской системы сил (например, в плоскости Oxy) из этих уравнений получаются только три:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0; \\ \sum y_i &= 0; \\ \sum M_O &= 0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

причем оси и точка O , относительно которой пишется уравнение моментов, выбираются произвольно. Это **первая форма** уравнений равновесия.

Уравнения равновесия могут быть записаны иначе:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0; \\ \sum M_A &= 0; \\ \sum M_B &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Это **вторая форма** уравнений равновесия, причем ось Ox не должна быть перпендикулярна линии, проходящей через точки A и B .

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; \\ \sum M_B &= 0; \\ \sum M_C &= 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Это **третья форма** уравнений равновесия, причем точки **A**, **B** и **C** не должны лежать на одной прямой. Предпочтительность написания форм уравнений равновесия зависит от конкретных условий задачи и навыков решающего.

При действии на тело плоской системы параллельных сил одно из уравнений исчезает и остаются два уравнения (рисунок 1.26, а):

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 0; \\ \sum M_o &= 0.\end{aligned}\quad (1.24)$$

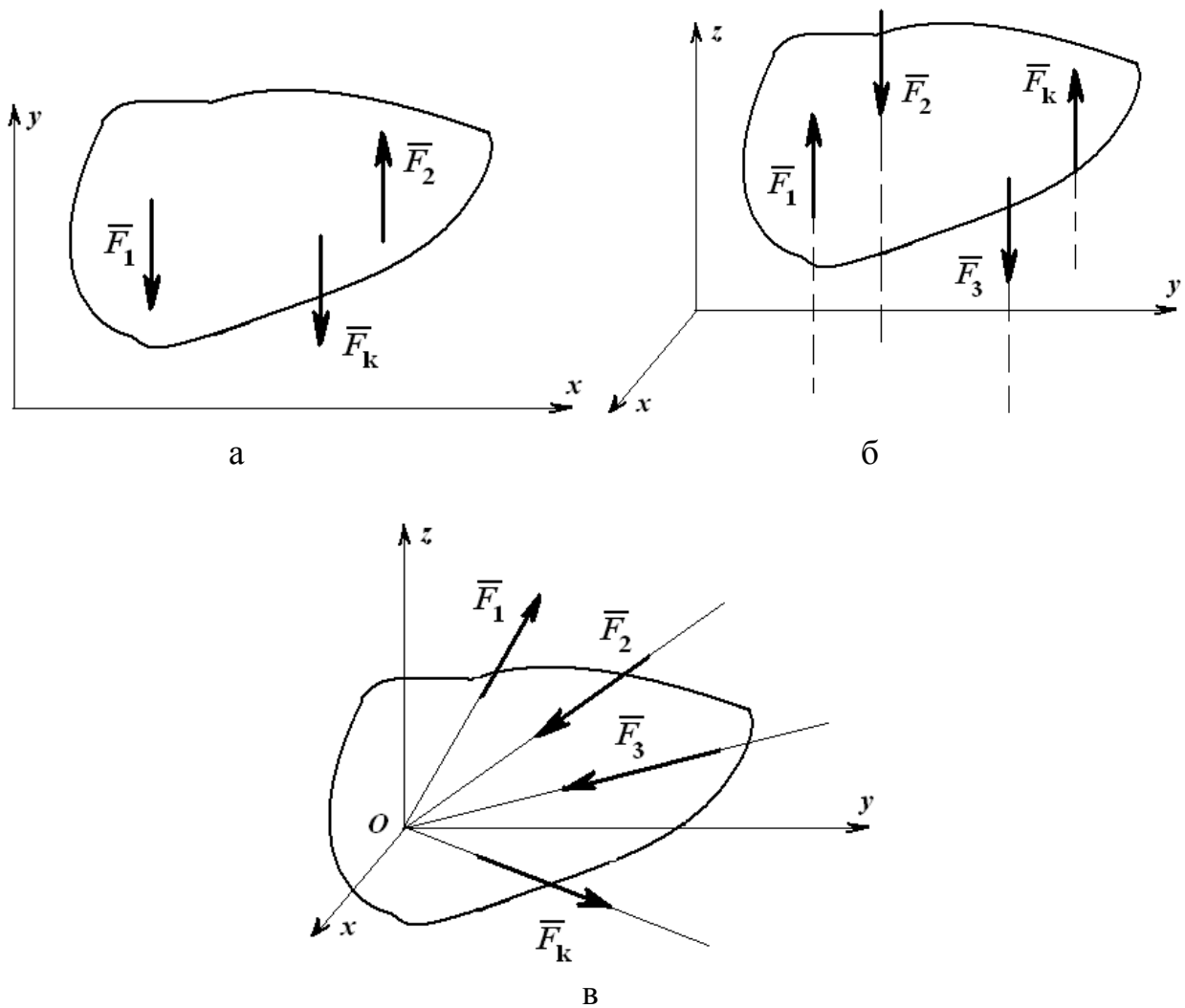


Рисунок 1.26

Для пространственной системы параллельных сил (рисунок 1.26, б) могут быть записаны три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum z_i &= 0; \\ \sum M_{ix} &= 0; \\ \sum M_{iy} &= 0.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Для системы сходящихся сил (линии действия которых пересекаются в одной точке) можно написать три уравнения для пространственной системы:

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 0; \\ \sum y_i &= 0; \\ \sum z_i &= 0\end{aligned}\tag{1.26}$$

и два уравнения для плоской системы:

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 0; \\ \sum y_i &= 0.\end{aligned}\tag{1.27}$$

В каждом из вышеприведенных случаев число неизвестных, находимых при решении уравнений, соответствует числу записанных уравнений равновесия.

2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СИЛ

Чаще всего решение задач раздела «Статика» сводится к определению некоторых сил, действующих на твердое тело, находящееся в равновесии. Можно отметить следующую последовательность выполнения этапов решения задач:

- выделяется тело, равновесие которого рассматривается;
- показываются все действующие на это тело внешние (активные) силы;
- действие связей заменяется реакциями связей (пассивными силами);
- в выбранной системе координат составляются уравнения равновесия, из которых находятся искомые величины.

Успех при решении задач часто зависит от аккуратно выполненного чертежа, на котором выдержано геометрическое подобие рассматриваемых тел, верно расставленных внешних сил и реакций связей. Неверно замененная силой связь ведет к неправильно составленным уравнениям равновесия. В разделе «Статика» решаются статически определимые задачи, в которых число неизвестных должно соответствовать числу уравнений, которые можно составить. Если число неизвестных оказывается больше (или меньше), то нужно проверить, верно ли заменена связь своей реакцией.

2.1 РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Как уже было отмечено выше, при равновесии системы сходящихся сил должно выполняться условие: $\bar{\mathbf{R}} = 0$. Из этого условия пишутся три уравнения для пространственной системы сил

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 0; \\ \sum y_i &= 0; \\ \sum z_i &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

и два уравнения для плоской системы сил

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 0; \\ \sum y_i &= 0.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Из этих уравнений определяются неизвестные величины.

2.1.1 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Задача 2.1

Груз $Q = 1000$ Н удерживается с помощью двух невесомых стержней, шарнирно скрепленных между собой в точке A и в шарнирах B и C с вертикальной стеной ($\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$). Определить усилия в стержнях AB и BC (рисунок 2.1, а).

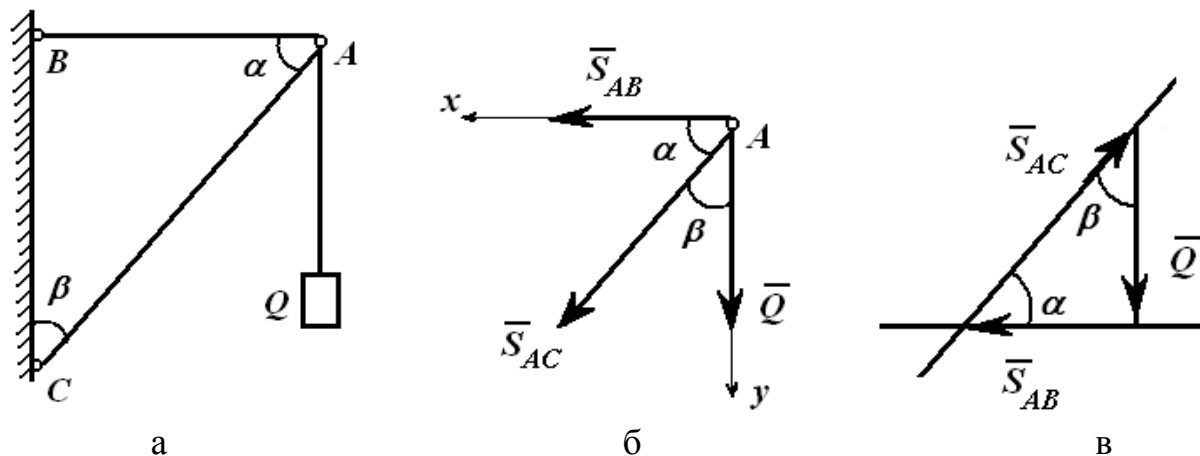


Рисунок 2.1

Решение

В данном случае следует рассмотреть равновесие точки A , т.к. все силы приложены в этой точке.

Нить с грузом натянута силой Q . В равновесии точку A удерживают два невесомых стержня. Их реакции всегда направлены вдоль стержней. Реакции принято направлять от узла (точки A), т.е. предполагается, что стержни работают на растяжение (рисунок 2.1, б). В случае отрицательного ответа при решении уравнений стержень работает на сжатие.

При равновесии системы сил выполняется равенство

$$\bar{Q} + \bar{S}_{AB} + \bar{S}_{AC} = 0. \quad (2.3)$$

Это векторное равенство можно построить. Откладываем в масштабе известную силу $\bar{Q}$, к концу вектора прибавляем $\bar{S}_{AB}$, т.к. его величина и направление неизвестны, проводим через конец вектора $\bar{Q}$ горизонтальную линию (параллельно $\bar{S}_{AB}$, рисунок 2.1, в). Замыкающий вектор $\bar{S}_{AC}$ должен пройти через начало вектора $\bar{Q}$ под углом β к вертикали. Результатом построения является замкнутый треугольник (рисунок 2.1, в). Величины напряжений в стержнях можно получить, умножая замеренные значения векторов сил на масштаб или воспользовавшись теоремой синусов:

$$\frac{Q}{\sin \alpha} = \frac{S_{AB}}{\sin \beta} = \frac{S_{AC}}{\sin 90^\circ}, \quad S_{AB} = Q \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad S_{AC} = Q \frac{\sin 90^\circ}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha}. \quad (2.4)$$

Направление силы $\bar{S}_{AC}$ в силовом треугольнике говорит о том, что этот стержень работает на сжатие.

Задача может быть решена и аналитически. Для этого выбираем систему координат xAy (рисунок 2.1, б) и проецируем на ее оси векторное равенство (2.3):

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0, \quad S_{AB} + S_{AC} \sin \beta = 0; \\ \sum y_i &= 0, \quad Q + S_{AC} \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом $\sin \beta = \cos \alpha$, $\sin \alpha = \cos \beta$.

После решения уравнений находим

$$S_{AC} = -\frac{Q}{\sin \alpha}, \quad S_{AB} = -S_{AC} \sin \beta = \frac{Q}{\sin \alpha} \sin \beta. \quad (2.6)$$

То есть и в этом решении по знакам в ответах получаем, что стержень AC работает на сжатие, а стержень AB – на растяжение.

Задача 2.2

Однородная балка AB весом P закреплена в точке A шарнирно-неподвижной опорой; трос BC , удерживающий балку, составляет с ней угол α . Определить натяжение троса и реакцию опоры A (рисунок 2.2, а).

Решение

Силы, действующие на балку, приложены к разным ее точкам, поэтому в данной задаче нужно рассмотреть равновесие балки. Балка однородная, поэтому сила $\bar{P}$ (вес балки) приложена к ее середине (рисунок 2.2, б). Реакция троса – сила $\bar{T}$ – направлена вдоль троса. Направление реакции опоры A можно определить, воспользовавшись **теоремой о трех силах**. По этой теореме линии действия трех непараллельных сил $\bar{P}$, $\bar{T}$ и $\bar{R}_A$ должны пересекаться в одной точке. То есть угол β должен быть равен углу α . Далее возможно геометрическое или аналитическое решение.

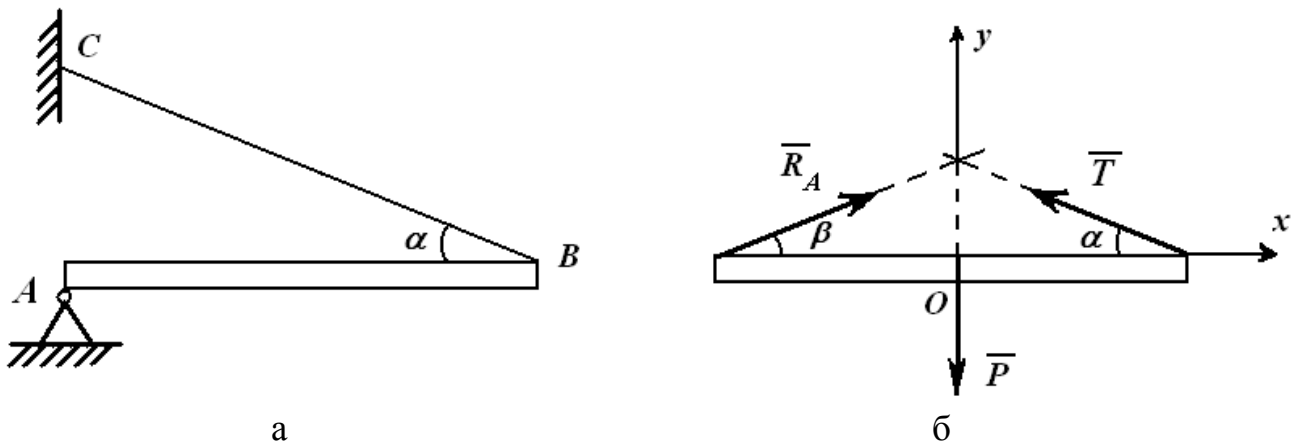


Рисунок 2.2

Так как система находится в равновесии, то

$$\bar{P} + \bar{T} + \bar{R}_A = 0. \quad (2.7)$$

Строим это геометрическое равенство (рисунок 2.3), начиная с известной силы $\bar{P}$; под углом α к горизонтали через конец вектора $\bar{P}$ проводим линию MN , вдоль которой направлена сила $\bar{T}$. Так как сумма всех сил должна быть равна нулю, то вектор $\bar{R}_A$ должен заканчиваться в начале вектора $\bar{P}$ под углом β к горизонту (линия KL).

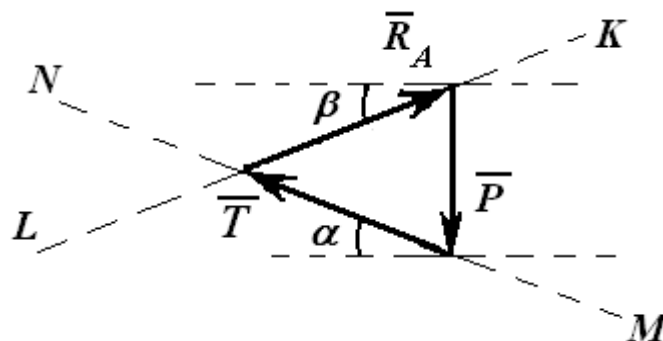


Рисунок 2.3

Точка пересечения линий MN и KL – это конец вектора $\bar{T}$ и начало вектора $\bar{R}_A$. Далее можно определить величины $\bar{T}$ и $\bar{R}_A$, умножив длины отрезков на выбранный масштаб или воспользовавшись теоремой синусов:

$$\frac{P}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{T}{\sin(90 - \beta)} = \frac{R_A}{\sin(90 - \alpha)}; \quad (2.8)$$

$$T = P \frac{\sin(90 - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad R_A = P \frac{\sin(90 - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (2.9)$$

Аналитическое решение предполагает составление двух уравнений. Проецируем векторное равенство (2.7) на выбранные оси координат (рисунок 2.2,б) и получаем два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0, & -T \cos \alpha + R_A \cos \beta &= 0; \\ \sum y_i &= 0, & -P + T \sin \alpha + R_A \sin \beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из этих уравнений определяются величины $\bar{T}$ и $\bar{R}_A$:

$$R_A = \frac{P}{\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha + \sin \beta}, \quad T = \frac{P \cos \beta}{\cos \alpha (\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha + \sin \beta)}. \quad (2.11)$$

Задача 2.3

Груз Q весом 1000 Н подвешен в точке D , удерживаемой тремя невесомыми стержнями, шарнирно скрепленными между собой в точке D и с горизонтальной поверхностью в точках A , B и C (рисунок 2.4). Определить реакции опор в точках A , B и C .

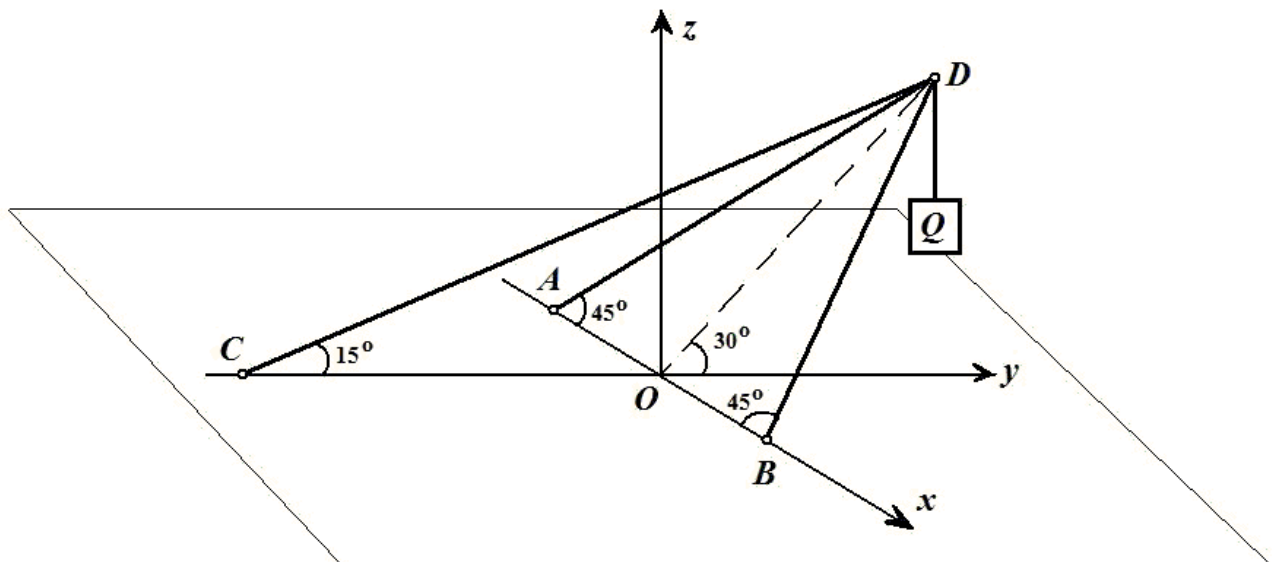


Рисунок 2.4

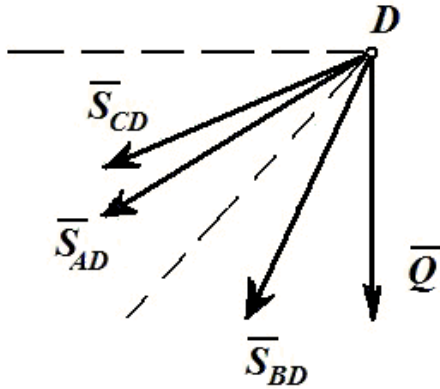
Решение

Рисунок 2.5

В данной задаче следует рассмотреть равновесие точки D . Именно в этой точке пересекаются линии действия всех сил: натяжение троса $\bar{Q}$, усилия в стержнях AD , BD , CD (рисунок 2.5). Силы направляем от узла D , тем самым предполагая стержни растянутыми. Это задача на равновесие пространственной системы сходящихся сил. Геометрическое решение в данном случае не дает наглядного представления о геометрической сумме сил:

$$\bar{Q} + \bar{S}_{AD} + \bar{S}_{BD} + \bar{S}_{CD} = 0. \quad (2.12)$$

Поэтому векторное равенство проецируем на оси координат (рисунки 2.4, 2.5) и получаем три уравнения:

$$\sum x_i = 0, \quad -S_{AD} \cos 45^\circ + S_{BD} \cos 45^\circ = 0; \quad (2.13)$$

$$\sum y_i = 0, \quad -S_{AD} \sin 45^\circ \cos 30^\circ - S_{BD} \sin 45^\circ \cos 30^\circ - S_{CD} \cos 15^\circ = 0; \quad (2.14)$$

$$\sum z_i = 0, \quad -Q - S_{AD} \sin 45^\circ \sin 30^\circ - S_{BD} \sin 45^\circ \sin 30^\circ - S_{CD} \sin 15^\circ = 0. \quad (2.15)$$

Решая полученные уравнения, определяем усилия в стержнях.

Из (2.13) $S_{AD} = S_{BD}$,

из (2.14) $-2S_{AD} \sin 45^\circ \cos 30^\circ = S_{CD} \cos 15^\circ, \quad S_{AD} = -\frac{1}{2} S_{CD} \frac{\cos 15^\circ}{\sin 45^\circ \cos 30^\circ},$

из (2.15) $-Q - 2S_{AD} \sin 45^\circ \sin 30^\circ - S_{CD} \sin 15^\circ = 0$ или

$$-Q - \left(-S_{CD} \frac{\cos 15^\circ}{\sin 45^\circ \cos 30^\circ} \right) \sin 45^\circ \sin 30^\circ - S_{CD} \sin 15^\circ = 0;$$

$$-Q + S_{CD} \cos 15^\circ \tan 30^\circ - S_{CD} \sin 15^\circ = 0;$$

$$S_{CD} = \frac{Q}{\cos 15^\circ \tan 30^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{1000}{0,96 \cdot 0,58 - 0,26} = \frac{1000}{0,29} = 3448,27 \text{ Н} \approx 3,4 \text{ кН};$$

$$S_{AD} = S_{BD} = -\frac{1}{2} S_{CD} \frac{\cos 15^\circ}{\sin 45^\circ \cos 30^\circ} = -\frac{1}{2} 3,4 \frac{0,96}{0,71 \cdot 0,87} = -2,64 \text{ кН.}$$

Стержень **CD** работает на растяжение, а стержни **AD** и **BD** сжаты. Соответственно реакции опор в точках **A**, **B** и **C** направлены вдоль стержней.

2.2 РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

При равновесии произвольной плоской системы сил уравнения равновесия могут быть записаны в виде формул 1.21 – 1.23 (см. раздел 1.9). В задачах такого типа число неизвестных плоской системы сил не должно превышать трех.

2.2.1 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СИЛ В ПЛОСКОСТИ

Задача 2.4

Невесомая конструкция **ADK** (рисунок 2.6, а) закреплена в точке **A** с помощью шарнирно-неподвижной опоры, в точке **B** невесомым стержнем под углом α . На конструкцию действуют распределенная нагрузка интенсивностью q , пара сил с моментом M и сосредоточенная сила $\bar{F}$ под углом β . Определить опорные реакции.

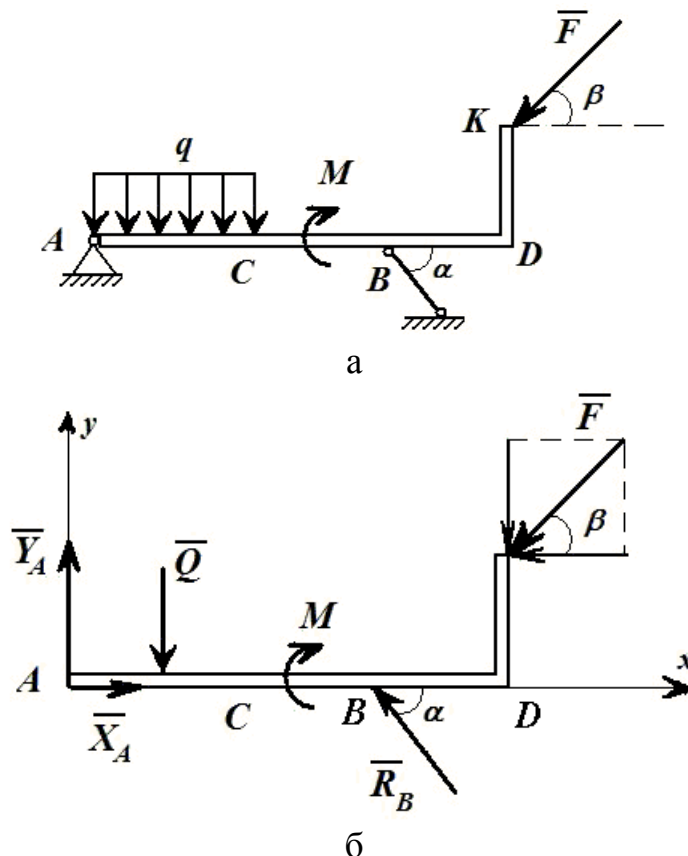


Рисунок 2.6

Решение

При решении задачи руководствуемся планом раздела 2.

В равновесии находится конструкция ADK , к которой приложены силы $\bar{Q}$ (в середине отрезка AC , причем $Q = q \cdot AC$), $\bar{F}$ в точке K и пара сил с моментом M . Опора в точке A и стержень в точке B заменены силами $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и $\bar{R}_B$ – реакциями опор. Выбрана система координат Axy (рисунок 2.6, б).

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0, & X_A - R_B \cos \alpha - F \cos \beta &= 0; \\ \sum y_i &= 0, & Y_A - Q + R_B \sin \alpha - F \sin \beta &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0, & -Q \frac{AC}{2} - M + R_B \sin \alpha \cdot AB - F \sin \beta \cdot AD + F \cos \beta \cdot KD &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из полученных уравнений определяются $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и $\bar{R}_B$.

Задача 2.5

Конструкция ADB (рисунок 2.7, а) закреплена в точке A с помощью скользящей заделки, в точке B – шарнирно-подвижная опора с опорной плоскостью, находящейся под углом α к горизонту. Заданы: сила $\bar{F}$ под углом β к вертикали, равномерно возрастающая нагрузка с интенсивностью $q_{\max}$ и пара сил с моментом M . Определить опорные реакции.

Решение

На рисунке 2.7, б показаны действующие на конструкцию ADB силы и реакции связей: сила $Q = \frac{1}{2} q_{\max} DK$ (приложена в точке L , причем $DL = \frac{2}{3} DK$), реакция $\bar{R}_B$ в точке B , реакции $\bar{R}_A$ и M_A в скользящей заделке.

Для написания уравнений равновесия может быть использована **вторая форма** уравнений равновесия (формула 1.22):

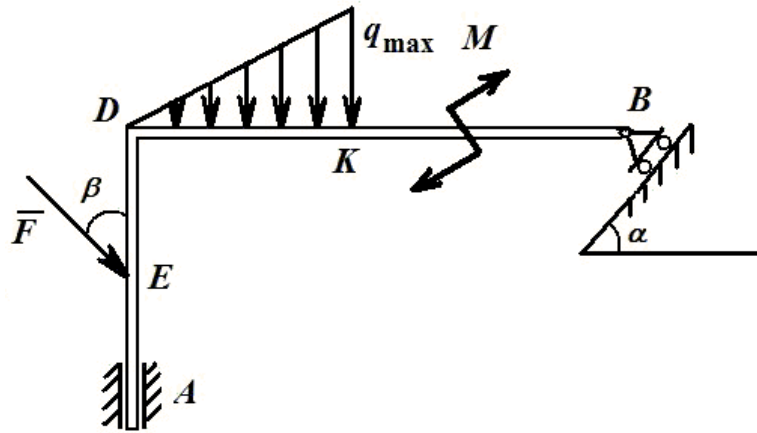
$$\sum y_i = 0, \quad -F \cos \beta - Q + R_B \cos \alpha = 0; \quad (2.17)$$

$$\sum M_{iN} = 0,$$

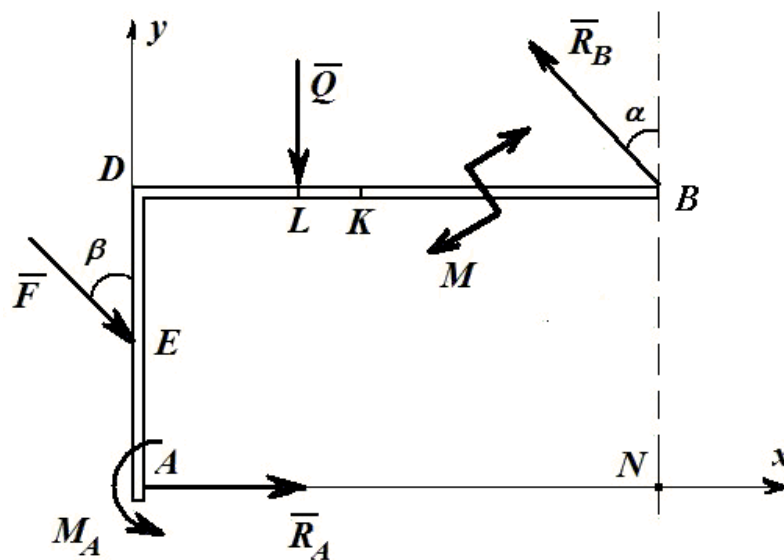
$$M_A + F \cos \beta \cdot AN - F \sin \beta \cdot AE + Q \cdot BL - M + R_B \sin \alpha \cdot AD = 0; \quad (2.18)$$

$$\sum M_{iB} = 0,$$

$$-M + Q \cdot BL + F \sin \beta \cdot DE + F \cos \beta \cdot BD + M_A + R_A \cdot AD = 0. \quad (2.19)$$



а



б

Рисунок 2.7

$$\text{Из (2.17)} \quad R_B = \frac{F \cos \beta + Q}{\cos \alpha},$$

$$\text{из (2.18)} \quad M_A = M - Q \cdot BL - F(\cos \beta \cdot AN - \sin \beta \cdot AE) - R_B \sin \alpha \cdot AD,$$

$$\text{из (2.19)} \quad R_A = \frac{1}{AD} (M - Q \cdot BL - F(\sin \beta \cdot DE + \cos \beta \cdot BD) - M_A).$$

2.2.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В некоторых задачах приходится рассматривать равновесие не одного, а нескольких соединенных между собой тел (составных конструкций). При решении подобных задач следует конструкцию расчленить на отдельные тела и

рассматривать равновесие каждого тела. Силы взаимодействия между телами конструкции, ранее считавшиеся внутренними, становятся внешними и с учетом закона равенства действия и противодействия будут равны по величине и противоположны по направлению. Число неизвестных, которые можно определить при решении этих задач, должно соответствовать числу уравнений, которые можно составить при равновесии данных тел.

Задача 2.6

Две части конструкции соединены между собой шарниром в точке C (рисунок 2.8). В точке A – глухая заделка, в точке B – бискользящая заделка. Конструкция нагружена равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q , парой сил с моментом M и сосредоточенной силой $\bar{F}$ под углом α . Определить опорные реакции и давление в шарнире C .

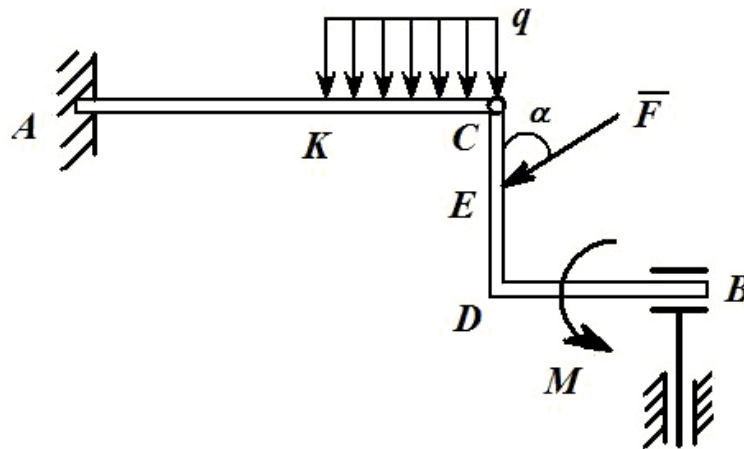


Рисунок 2.8

Решение

На рисунке 2.9 на освобожденной от связей конструкции (рисунок 2.9, а) и ее отдельных деталях (рисунок 2.9, б, в) показаны силы, действующие на всю конструкцию и две выделенные ее части. Действие глухой заделки в точке A заменено силами $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и моментом M_A , в бискользящей заделке – моментом M_B . При разделении двух частей их действие друг на друга показано силами $\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$ и $\bar{X}_C^|$, $\bar{Y}_C^|$, причем

$$\bar{X}_C = -\bar{X}_C^|, \bar{Y}_C = -\bar{Y}_C^|. \quad (2.20)$$

Для каждой из частей можно написать по три уравнения равновесия и найти с учетом (2.20) неизвестные опорные реакции $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, M_A , M_B и давление в шарнире C ($\bar{X}_C$, $\bar{Y}_C$).

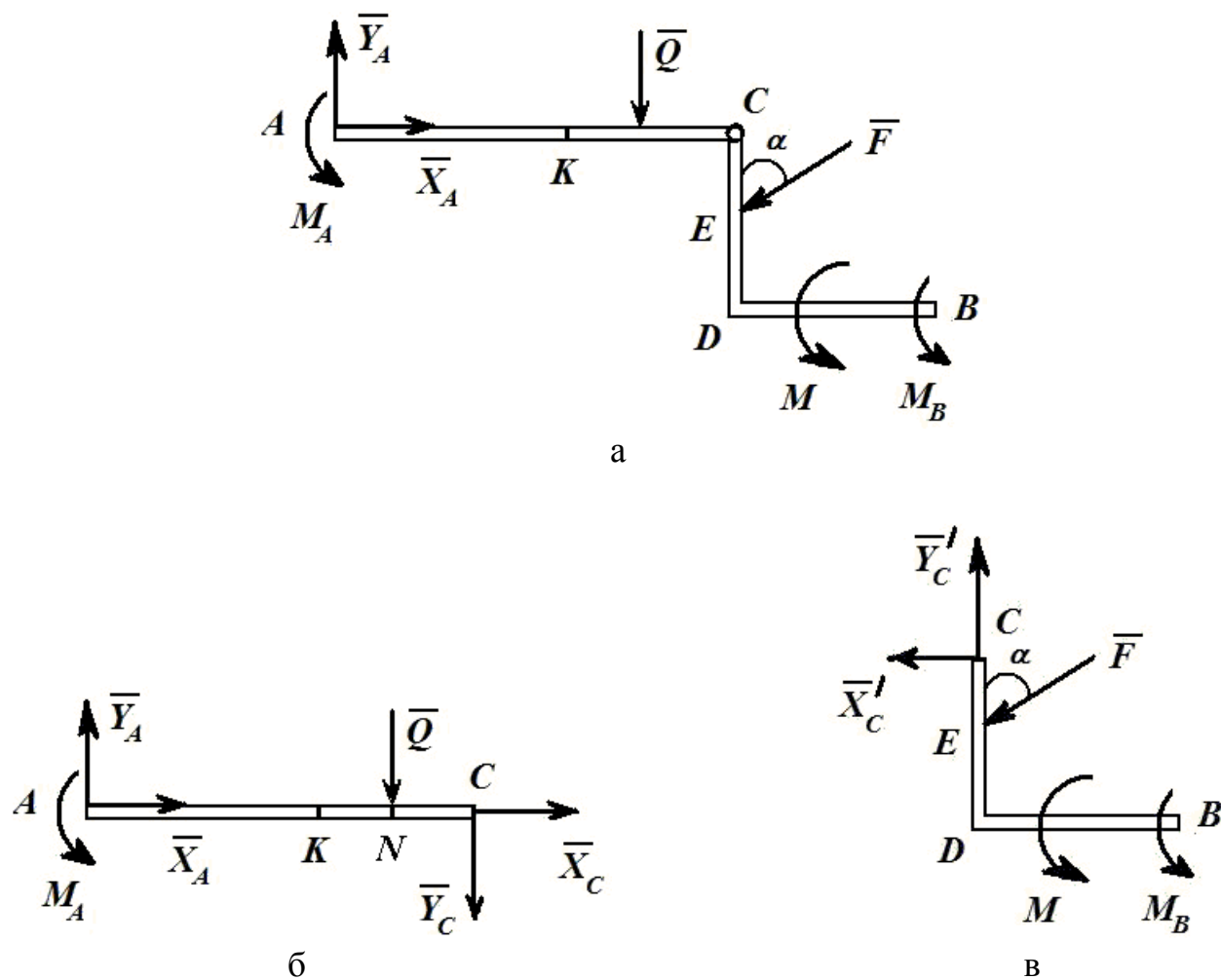


Рисунок 2.9

Уравнения равновесия для левой части конструкции:

$$\sum x_i = 0, \quad X_A + X_C = 0; \quad (2.21)$$

$$\sum y_i = 0, \quad Y_A - Q - Y_C = 0; \quad (2.22)$$

$$\sum M_{iA} = 0, \quad M_A - Q \cdot AN - Y_C \cdot AC = 0. \quad (2.23)$$

Для правой части:

$$\sum x_i = 0, \quad -X_C^I - F \sin \alpha = 0; \quad (2.24)$$

$$\sum y_i = 0, \quad Y_C^I - F \cos \alpha = 0; \quad (2.25)$$

$$\sum M_{iC} = 0, \quad M_B + M - F \sin \alpha \cdot CE = 0. \quad (2.26)$$

Из уравнений (2.21 – 2.26) находим неизвестные величины.

Систему уравнений равновесия можно составить иначе: написать три уравнения для конструкции в целом (рисунок 2.9, а) и три уравнения для какой-либо одной ее части. В любом случае у нас есть три уравнения для проверки правильности решения. В наших расчетах это уравнения для всей конструкции:

$$X_A - F \sin \alpha = 0; \quad (2.27)$$

$$Y_A - Q - F \cos \alpha = 0; \quad (2.28)$$

$$M_A - Q \cdot AN - F \sin \alpha \cdot CE - F \cos \alpha \cdot AC + M + M_B = 0. \quad (2.29)$$

Подставив в них найденные из первых шести уравнений величины, мы должны убедиться в правильности решения.

Задача 2.7

Две части составной конструкции соединены в точке C скользящей заделкой и нагружены силой $\bar{F}_1$ под углом α , силой $\bar{F}_2$ под углом β , парой сил с моментом M и равномерно возрастающей нагрузкой с интенсивностью $q_{\max}$ (рисунок 2.10). Определить опорные реакции.

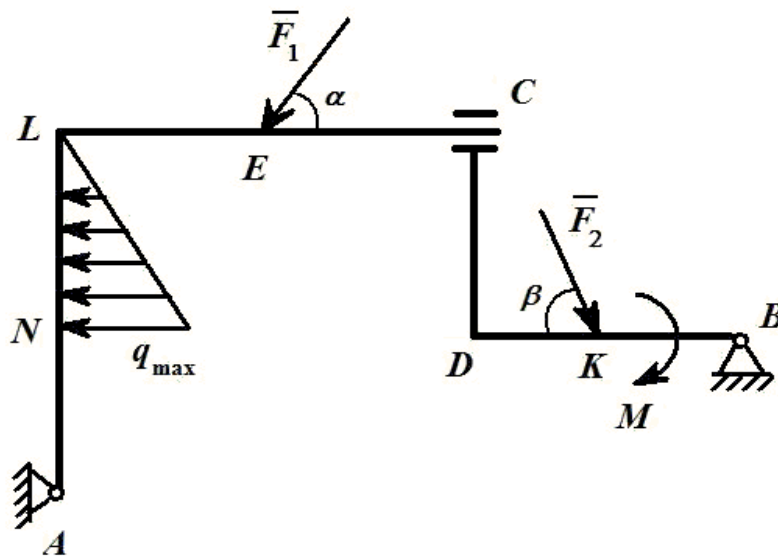


Рисунок 2.10

Решение

На рисунке 2.11 представлена вся конструкция (рисунок 2.11, а) и отдельные ее части (рисунок 2.11, б, в), связи заменены реакциями связей. Число неизвестных шесть, т.е. задача решается методами статики.

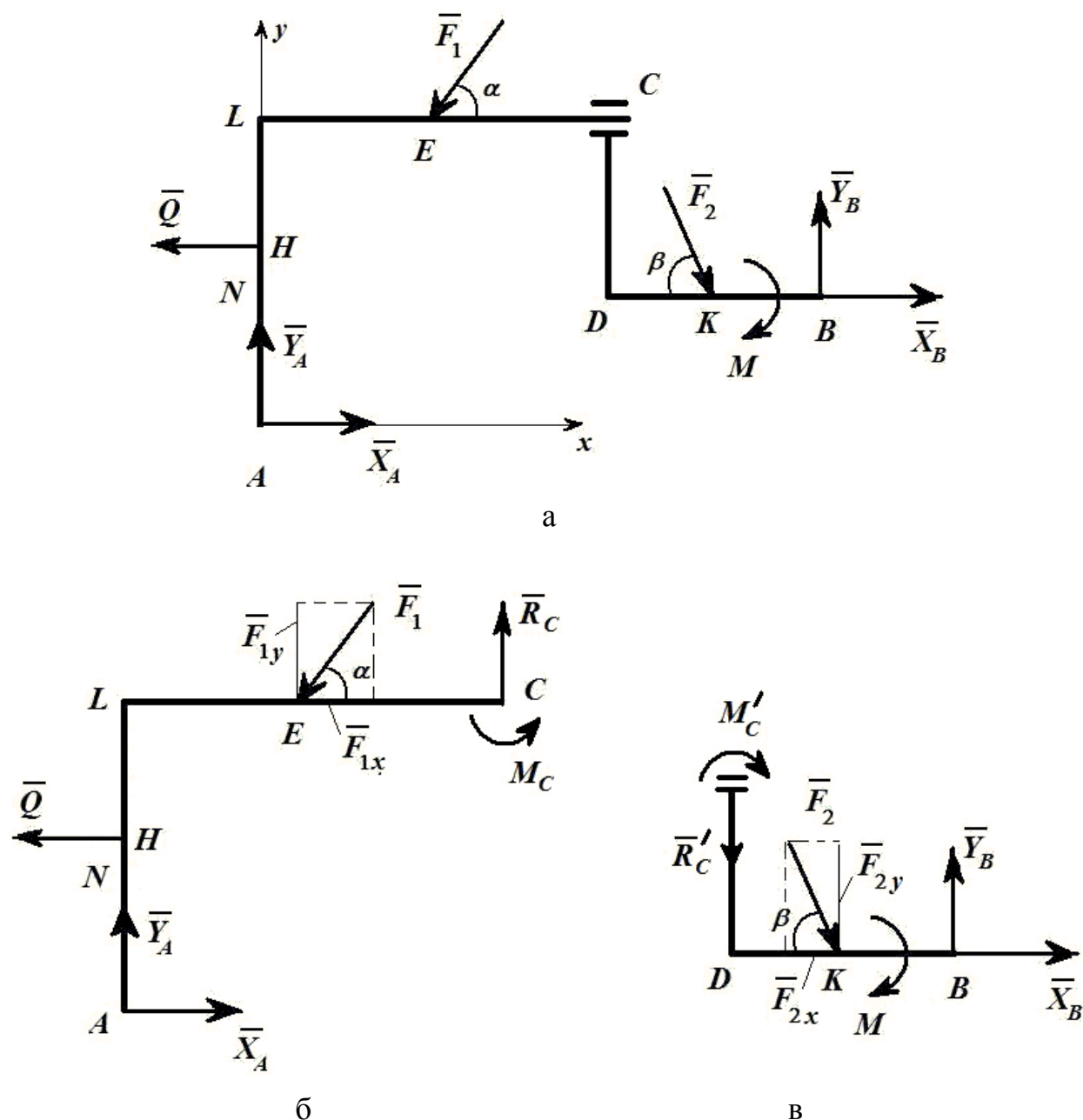


Рисунок 2.11

Для выбранной системы координат xAy составляем уравнения равновесия для левой и правой частей конструкции.

Для левой части

$$\sum x_i = 0, \quad X_A - Q - F_{1x} = 0; \quad (2.30)$$

$$\sum y_i = 0, \quad Y_A - F_{1y} + R_C = 0; \quad (2.31)$$

$$\sum M_{iA} = 0,$$

$$M_C + Q \cdot (AN + \frac{1}{3}NL) + F_{1x} \cdot AL - F_{1y} \cdot LE + R_C \cdot LC = 0. \quad (2.32)$$

Для правой части

$$\sum x_i = 0, \quad X_B + F_{2x} = 0; \quad (2.33)$$

$$\sum y_i = 0, \quad Y_B - F_{2y} - R_C^{\perp} = 0; \quad (2.34)$$

$$\sum M_{iB} = 0, \quad F_{2y} \cdot BK - M + R_C^{\perp} \cdot BD - M_C^{\perp} = 0. \quad (2.35)$$

В этих уравнениях

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot LN, \quad LH = \frac{2}{3} LN, \quad F_{1x} = F_1 \cos \alpha, \quad F_{1y} = F_1 \sin \alpha;$$

$$R_C = R_C^{\perp}, \quad M_C = M_C^{\perp}, \quad F_{2x} = F_2 \cos \beta, \quad F_{2y} = F_2 \sin \beta.$$

Решив совместно уравнения (2.32) и (2.35), определяем R_C и M_C , после чего можно определить остальные неизвестные.

Для проверки составим уравнение моментов относительно точки A для всей конструкции:

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} = 0, \\ Q \cdot \left(AN + \frac{1}{3} NL \right) - F_{1y} \cdot LE + F_{1x} \cdot AL - F_{2y} \cdot (LC + DK) - \\ - F_{2x} \cdot (AL - CD) - X_B (AL - CD) + Y_B (LC + BD) = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Подставив в это уравнение данные задачи и найденные неизвестные величины, нужно убедиться в правильности расчетов.

2.3 РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

В случае равновесия твердого тела в пространстве можно составить шесть уравнений равновесия (формулы 1.20 раздела 1.9), из которых могут быть определены шесть неизвестных. План решения таких задач общий для всех типов задач на равновесие (раздел 2).

2.3.1 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Задача 2.8

При включении электродвигателя K груз Q весом 20 кН равномерно поднимается вверх (рисунок 2.12). Определить реакцию опор A и B и натяжение бесконечного ремня, если считать, что натяжение ведущей его части в два раза

больше натяжения ведомой ($T_1 = 2T_2$); $\alpha = 30^\circ$; заданы расстояния l_1, l_2, l_3 ; радиусы шкива – R и вала – r .

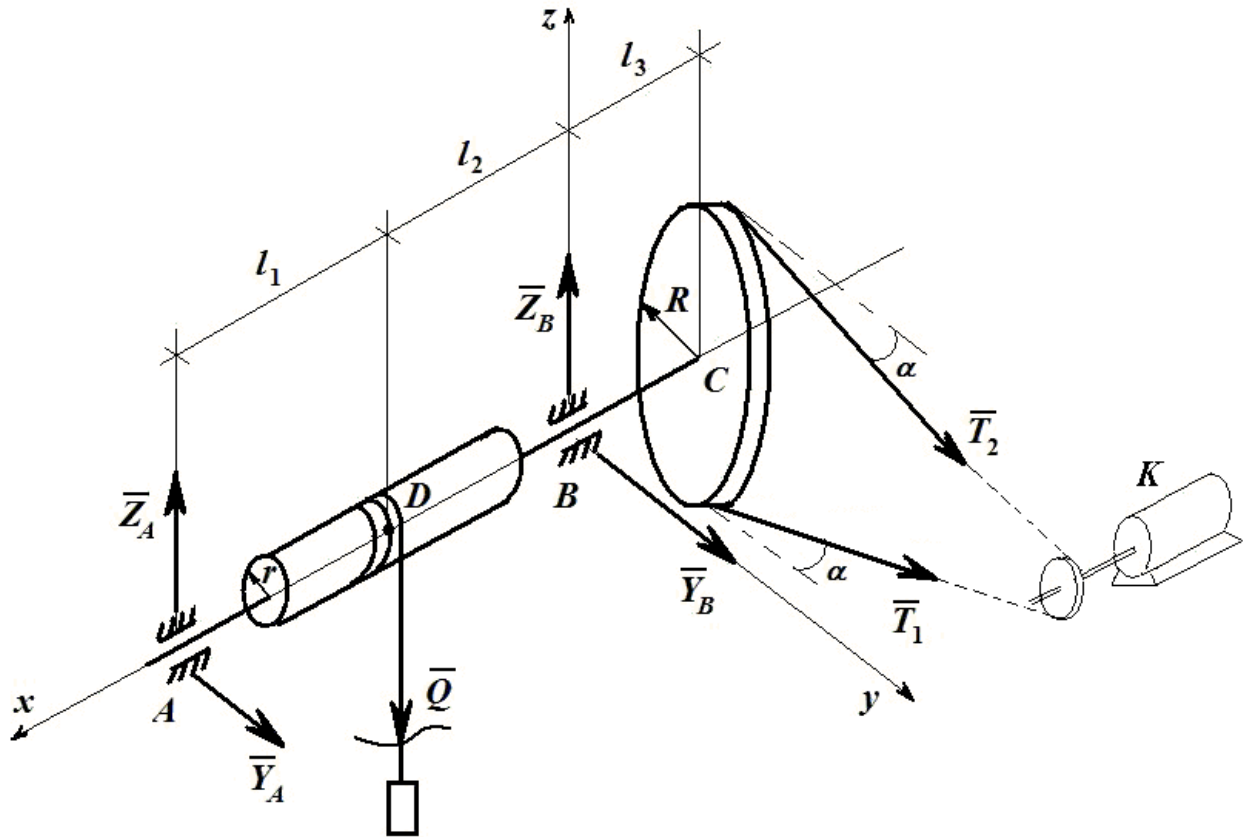


Рисунок 2.12

Решение

В задаче нужно рассмотреть равновесие ворота, к которому приложены внешние силы $\bar{Q}$, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ и реакции опор $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, $\bar{Y}_B$, $\bar{Z}_B$.

Прежде чем составлять уравнения равновесия, можно сделать дополнительные рисунки: вид навстречу каждой из координатных осей (рисунок 2.13), которые помогут в составлении уравнений.

Уравнения равновесия:

$$\sum x_i = 0; \quad (2.37)$$

$$\sum y_i = 0, \quad Y_A + Y_B + T_1' + T_2' = 0; \quad (2.38)$$

$$\sum z_i = 0, \quad Z_A + Z_B - Q + T_1'' - T_2'' = 0; \quad (2.39)$$

$$\sum M_{ix} = 0, \quad -Q \cdot r + T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = 0; \quad (2.40)$$

$$\sum M_{iy} = 0, \quad -Z_A(l_1 + l_2) + Q \cdot l_2 - T_2'' \cdot l_3 = 0; \quad (2.41)$$

$$\sum M_{iz} = 0, \quad Y_A(l_1 + l_2) - T_1' \cdot l_3 - T_2' \cdot l_3 = 0. \quad (2.42)$$

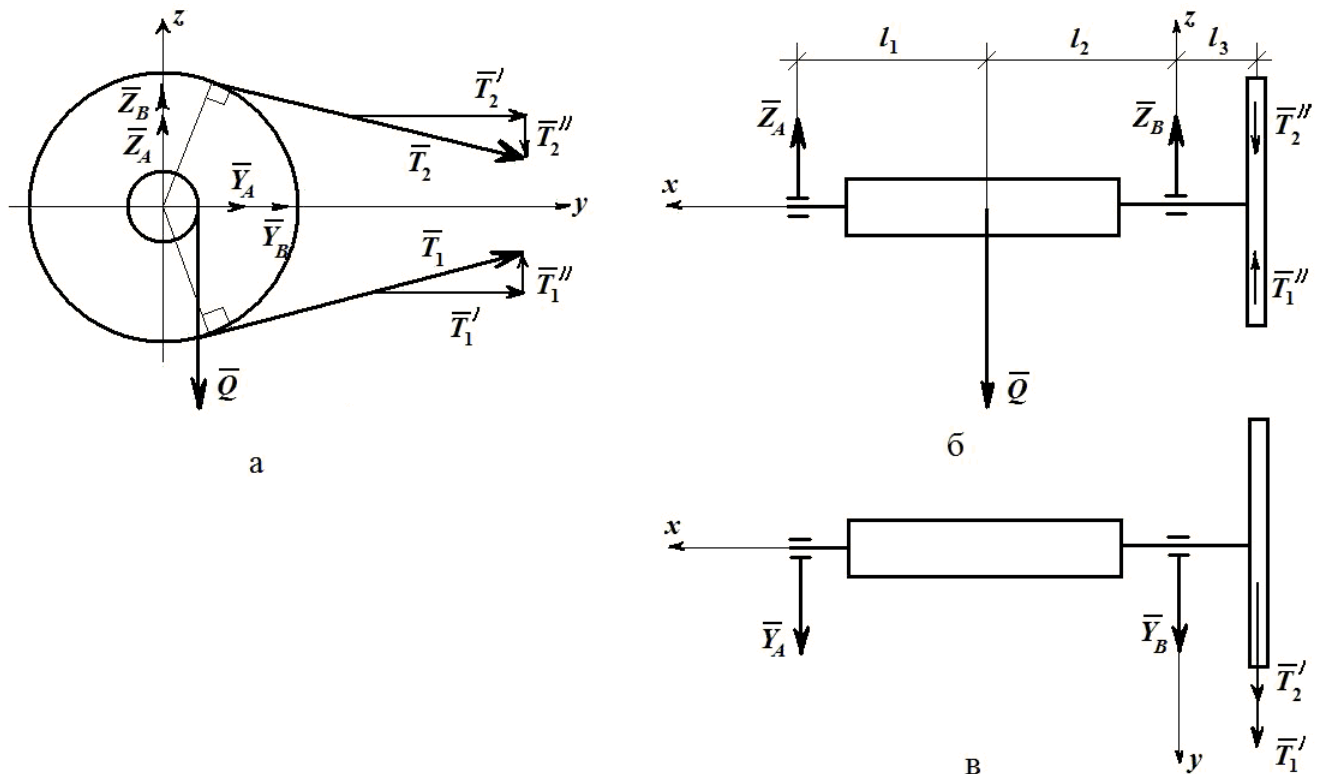


Рисунок 2.13

В этих уравнениях

$$T_1' = T_1 \cos \alpha, \quad T_2' = T_2 \sin \alpha, \quad T_1'' = T_1 \sin \alpha, \quad T_2'' = T_2 \sin \alpha.$$

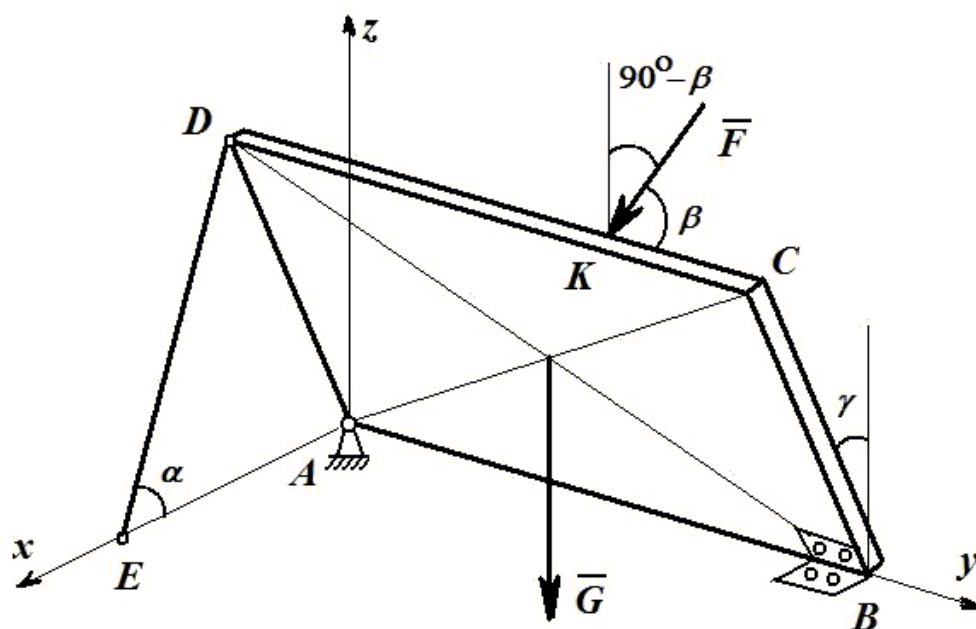
На ось Ox силы не проецируются. Поэтому из пяти уравнений находятся четыре неизвестные реакции: $\bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{Y}_B, \bar{Z}_B$, и с учетом $T_1 = 2T_2$ находятся натяжения ремней T_1 и T_2 .

Задача 2.9

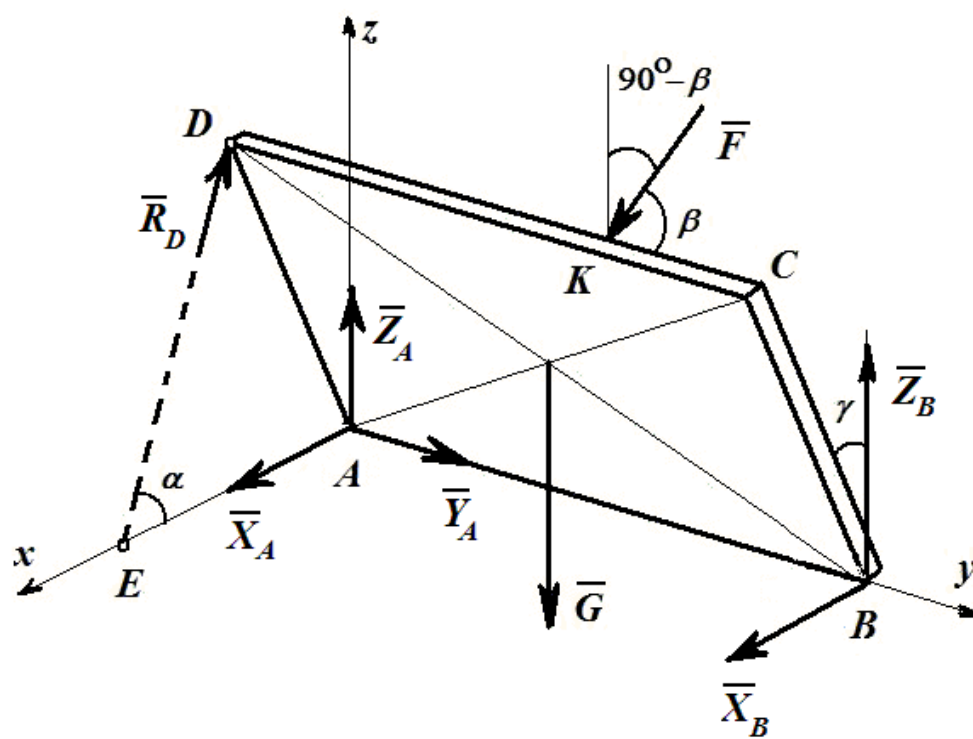
Однородная прямоугольная плита $ABCD$ весом G закреплена в точке A с помощью шарнирно-неподвижной опоры, в точке B цилиндрическим шарниром, в точке D шарнирно скреплена невесомым стержнем DE (рисунок 2.14, а). Плита составляет с вертикальной плоскостью угол γ , в точке K на нее действует сила $\bar{F}$, находящаяся в вертикальной плоскости. Определить опорные реакции и усилие в стержне DE .

Решение

В задаче необходимо рассмотреть равновесие плиты, к которой приложены силы $\bar{G}$ и $\bar{F}$ и реакции связей: $\bar{R}_D, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B$ (рисунок 2.14, б). Чтобы яснее представить расположение сил, на рисунке 2.15 покажем проекции плиты и действующих сил на соответствующие плоскости.



a



б

Рисунок 2.14

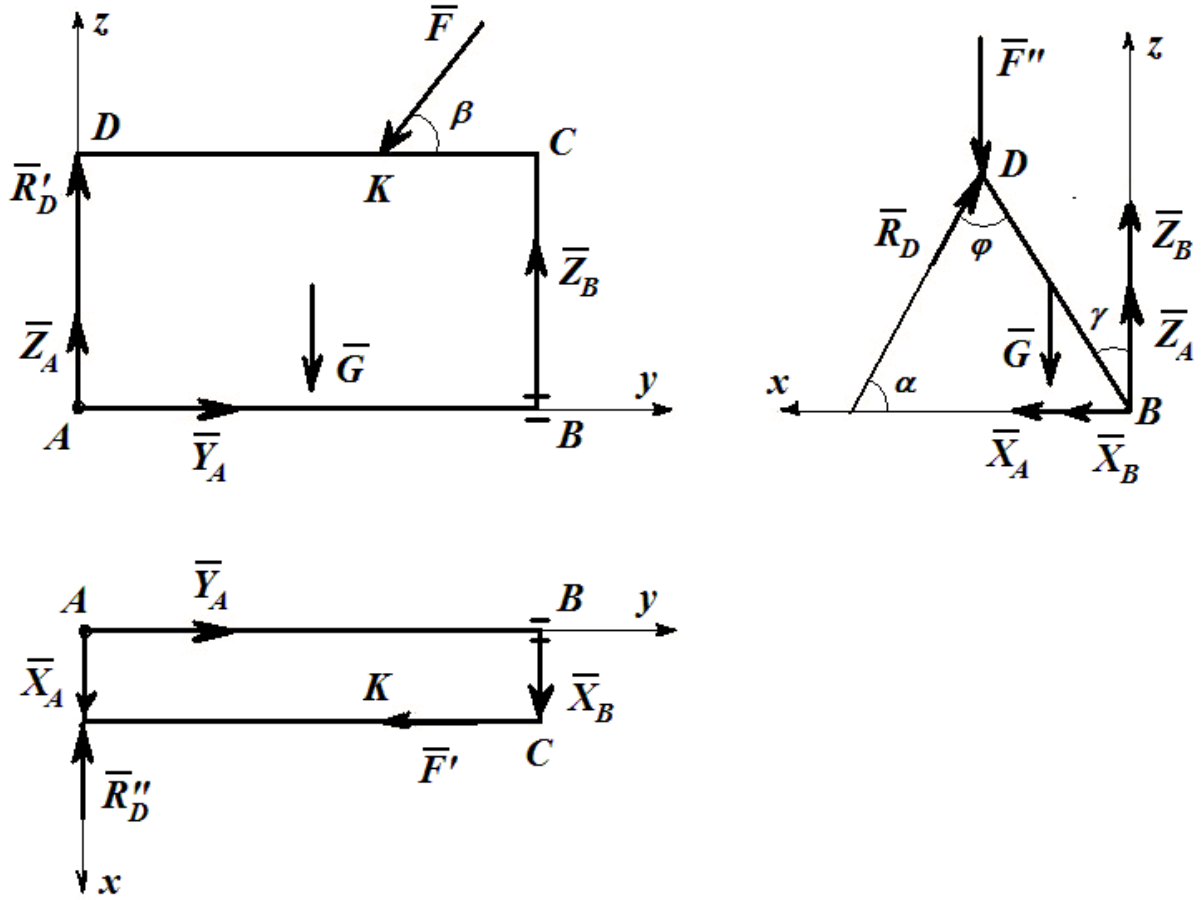


Рисунок 2.15

Уравнения равновесия для конструкции:

$$\sum x_i = 0, \quad X_A + X_B - R_D'' = 0, \quad R_D'' = R_D \cos \alpha; \quad (2.43)$$

$$\sum y_i = 0, \quad Y_A - F' = 0, \quad F' = F \cos \beta; \quad (2.44)$$

$$\sum z_i = 0, \quad Z_A + Z_B - G + R_D' - F \sin \beta = 0, \quad R_D' = R_D \sin \alpha; \quad (2.45)$$

$$\sum M_{ix} = 0, \quad -G \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB - F \sin \beta \cdot DK + F \cos \beta \cdot AD \cdot \cos \gamma = 0; \quad (2.46)$$

$$\sum M_{iy} = 0, \quad G \frac{BC}{2} \sin \gamma + F'' \cdot BC \cdot \sin \gamma - R_D \cdot BC \cdot \sin \varphi = 0; \quad (2.47)$$

$$\varphi = 90^\circ - \alpha + \gamma;$$

$$\sum M_{iz} = 0, \quad -X_B \cdot AB - F' \cdot BC \cdot \sin \gamma = 0. \quad (2.48)$$

Решая систему уравнений, определяем реакции опор и усилие R_D в стержне DE .

2.4 РАВНОВЕСИЕ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

При стремлении сдвинуть тело, лежащее на шероховатой поверхности, возникает сила реакции $\bar{R}$, которая имеет две составляющие – нормальную $\bar{N}$ и **силу трения** $\bar{F}_{mp}$ (рисунок 2.16).

В теоретической механике обычно рассматривается только сухое трение между поверхностями, при этом различают трение при покое или равновесии тела и трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью.

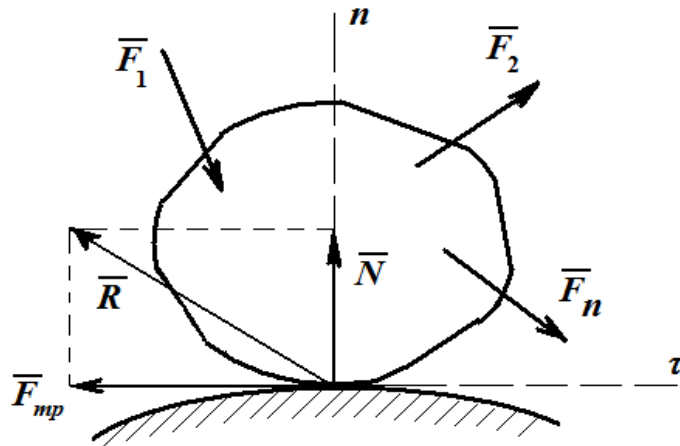


Рисунок 2.16

При покое сила трения зависит только от активных сил и может быть определена (рисунок 2.16):

$$F_{mp} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau} . \quad (2.49)$$

В результате экспериментальных исследований французскими учеными Гийомом Амонтоном и Шарлем Кулоном были установлены **законы** для сухого трения:

1) сила трения находится в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел и направлена в сторону, противоположную направлению возможного скольжения тела под действием активных сил. Величина силы трения зависит от активных сил и заключена между нулем и своим максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия:

$$0 \leq F_{mp} \leq F_{mp}^{\max} ;$$

2) максимальное значение силы трения при прочих равных условиях не зависит от площади контакта трущихся поверхностей и пропорционально нормальной реакции:

$$F_{mp}^{\max} = f N \text{ [Н]},$$

где f – коэффициент трения, являющийся безразмерной величиной и зависящий от материала и физического состояния трущихся поверхностей.

Если твердое тело под действием активных сил находится на шероховатой поверхности в предельном состоянии равновесия (сила трения достигает своего максимального значения), то полная реакция шероховатой поверхности $\bar{R}$ отклонена от нормали к общей касательной плоскости трущихся поверхностей на наибольший угол φ , который называют **углом трения** (рисунок 2.17). При этом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp}^{\max}}{N} = \frac{f N}{N} = f. \quad (2.50)$$

То есть тангенс угла трения равен коэффициенту трения.

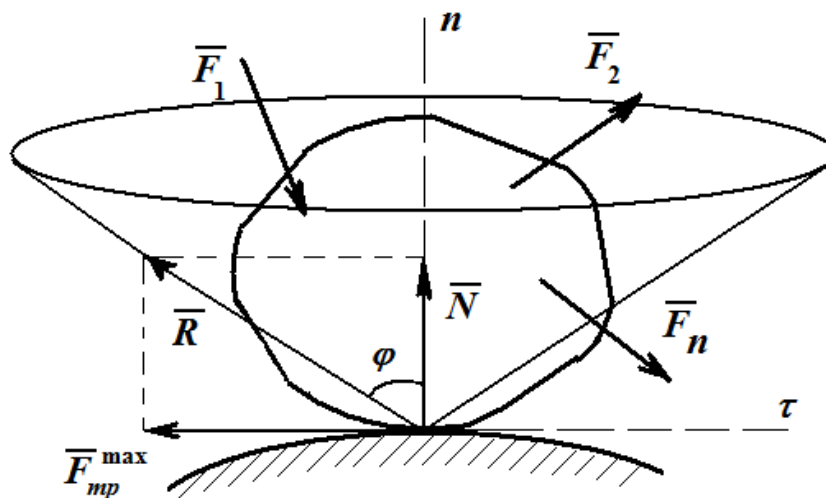


Рисунок 2.17

Конусом трения называют конус, описанный линией действия полной реакции, построенной на максимальной силе трения, вокруг направления нормальной реакции.

Для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через его вершину.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Вследствие деформации тел их касание происходит вдоль площадки AB , появляется распределенная система сил реакций, которая, согласно основной теореме статики, может быть заменена силой и парой (рисунок 2.18). Сила

раскладывается на две составляющие – нормальную N и силу трения F_{mp} ; пара сил называется **моментом сопротивления качению** M_c .

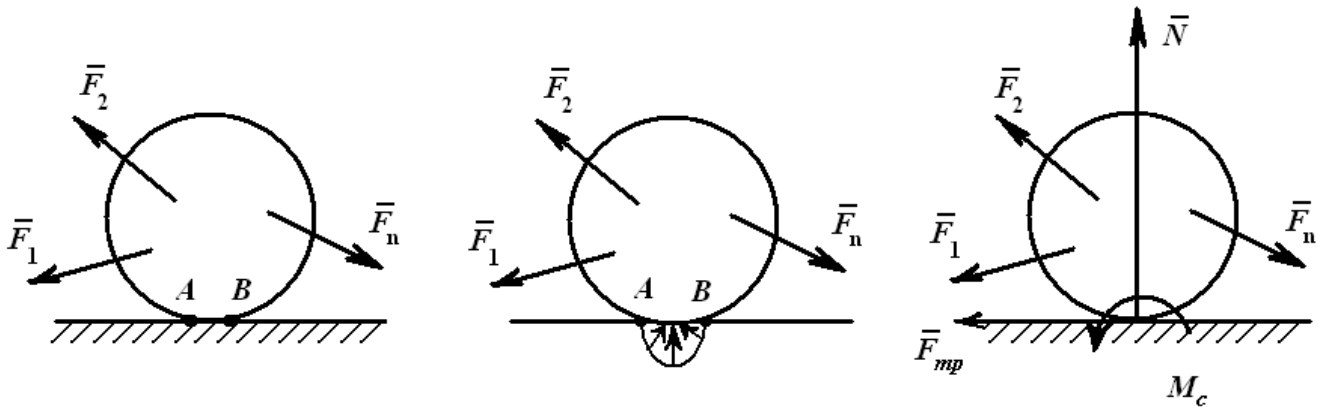


Рисунок 2.18

При равновесии тела момент сопротивления качению определяется из условий равновесия системы сил. При этом установлено, что момент сопротивления принимает значения от нуля до максимального значения. Максимальное значение момента сопротивления, соответствующее началу качения, определяется равенством

$$M_{c\max} = N\delta \text{ [Нм]},$$

где δ – **коэффициент трения качения**, измеряемый в метрах и зависящий от материала контактирующих тел и геометрии зоны контакта.

2.4.1 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

Задача 2.10

Тело весом $G = 100 \text{ Н}$ удерживается в равновесии на шероховатой наклонной плоскости силой P , действующей под углом $\beta = 15^\circ$ (рисунок 2.19). Угол наклона плоскости $\alpha = 45^\circ$, коэффициент трения между телом и плоскостью $f = 0,1$. Определить величину силы P при равновесии тела на шероховатой наклонной плоскости.

Решение

На тело действуют силы $\bar{N}$, $\bar{G}$, $\bar{P}$ и сила трения $\bar{F}_{mp}$. Возможны два случая предельного равновесия тела и соответственно два предельных значения силы $\bar{P}$ и два направления (по наклонной плоскости вверх и вниз) силы трения в зависимости от направления возможного скольжения тела (вниз по наклонной плоскости или вверх).

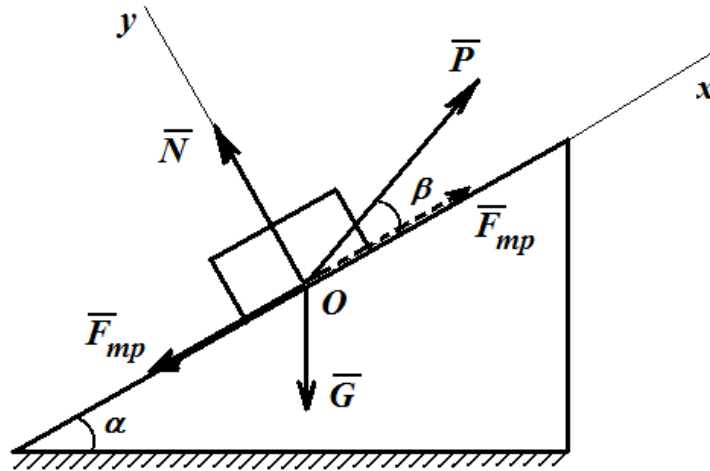


Рисунок 2.19

Составим уравнения равновесия в виде суммы проекций сил на координатные оси x и y (формулы 1.27 раздела 1.9):

- в случае, когда тело скользит вверх

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 0, & P \cos \beta - F_{mp} - G \sin \alpha &= 0; \\ \sum y_i &= 0, & P \sin \beta + N - G \cos \alpha &= 0.\end{aligned}$$

По закону Кулона $F_{mp} = fN$. Решая уравнения относительно P , получаем

$$P = \frac{G(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta}.$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$P = \frac{100(\sin 45^\circ + 0,1 \cdot \cos 45^\circ)}{\cos 15^\circ + 0,1 \cdot \sin 15^\circ} \approx 78 \text{ Н};$$

- в случае, когда тело скользит вниз

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 0, & P \cos \beta + F_{mp} - G \sin \alpha &= 0; \\ \sum y_i &= 0, & P \sin \beta + N - G \cos \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно P , получаем

$$P = \frac{G(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\cos \beta - f \sin \beta}; \quad P = \frac{100(\sin 45^\circ - 0,1 \cdot \cos 45^\circ)}{\cos 15^\circ - 0,1 \cdot \sin 15^\circ} \approx 68 \text{ Н}.$$

Таким образом, для силы P при равновесии тела имеем условие

$$68 \leq P \leq 78 \text{ Н}.$$

Задача 2.11

Для вкатывания вверх по наклонной плоскости цилиндрического катка весом $G = 500$ Н и радиусом $r = 0,4$ м к нему приложена постоянная сила F , действующая параллельно наклонной плоскости (рисунок 2.20, а). Угол подъема $\alpha = 30^\circ$, коэффициент трения качения $\delta = 0,002$ м, каток движется без проскальзывания. Определить величину силы F .

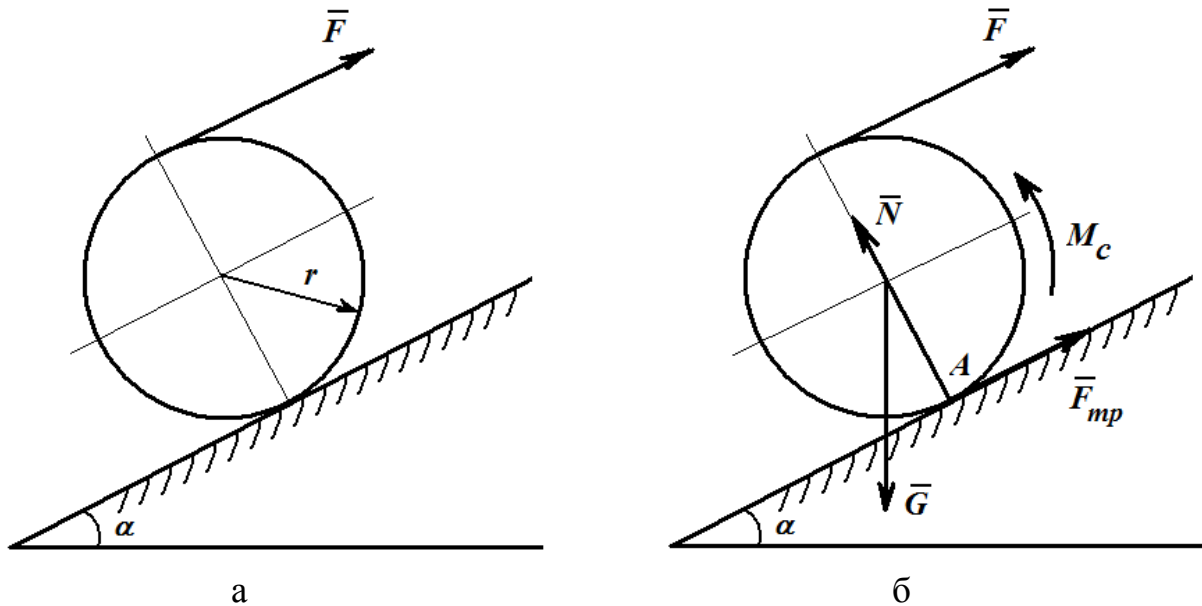


Рисунок 2.20

Решение

Отбросим связь и заменим ее действие на каток силами реакции. При этом на каток как на свободное твердое тело будут действовать его вес $\bar{G}$, нормальная реакция $\bar{N}$ наклонной плоскости и момент сопротивления качению M_c (рисунок 2.20, б). Каток движется без проскальзывания. Составляем уравнение равновесия как и для произвольной плоской системы сил: в данном случае уравнение моментов всех сил относительно точки касания с плоскостью (третье уравнение из формул 1.21 раздела 1.9):

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad G \cdot \sin \alpha \cdot r + M_c - F \cdot 2r = 0.$$

Отсюда находим $F = \frac{G \cdot \sin \alpha \cdot r + M_c}{2r}$. Учитывая, что $M_c = \delta N$, а $N = G \cdot \cos \alpha$, имеем

$$F = \frac{G \cdot \sin \alpha \cdot r + \delta \cdot G \cdot \cos \alpha}{2r} = \frac{500 \cdot \sin 30^\circ \cdot 0,4 + 0,002 \cdot 500 \cdot \cos 30^\circ}{2 \cdot 0,4} = 126 \text{ Н.}$$

Таким образом, для движения катка по шероховатой наклонной поверхности необходима сила $F \geq 126$ Н.

3 РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Для усвоения материала по разделу «Статика» обучающимся рекомендуется дополнительно использовать следующую литературу:

1 Аглиуллин М.Х., Имаева Э.Ш., Давлетов О.Б. Определение реакций опор составной конструкции: Учеб.-метод. пособие к выполнению расчетно-графической работы по теоретической механике. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2008. – 15 с.

2 Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика и кинематика. Т. 1. – 11-е изд. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.

3 Имаева Э.Ш. Статика. Исследование равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил. Центр тяжести твердого тела: Учеб.-метод. пособие для практических занятий по теоретической механике. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2007. – 18 с.

4 Имаева Э.Ш., Давлетов О.Б. Исследование равновесия тела под действием произвольной плоской системы сил. Исследование равновесия твердого тела при наличии трения: Учеб.-метод. пособие для практических занятий по теоретической механике. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2008. – 13 с.

5 Имаева Э.Ш., Моисеев К.В. Определение реакций опор твердого тела: Учеб.-метод. пособие к выполнению расчетно-графической работы по теоретической механике. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2008. – 15 с.

6 Харин О.Н. Лекции по теоретической механике: Учеб. пособие. В 2-х частях. Ч. 1. – М.: Нефть и газ, 2004. – 342 с.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – 10-е изд., стереот. – СПб.: Лань, 2008. – 736 с.
- 2 Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. - 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2003. – 719 с.
- 3 Сорокин В.Н. Краткий курс теоретической механики: в теории, задачах и плакатах: учебник. – М.: Интер, 2005. – 600 с.
- 4 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов. – 19-е изд., стереот. – М.: Высшая школа, 2009. – 416 с.
- 5 Чуркин В.М. Решение задач по теоретической механике. Геометрическая статика: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2006. – 304 с.
- 6 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 1998. – 768 с.