

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

**«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра «Механика и конструирование машин»

ДИНАМИКА

*Учебно-методическое пособие
к выполнению контрольных работ
по теоретической механике
для студентов заочной формы обучения*

**УФА
2013**

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом дисциплин «Теоретическая и прикладная механика» и «Механика», преподаваемых в технических вузах. Пособие поможет обучающимся закрепить теоретический материал и оценить свои знания по разделу «Динамика» модуля «Теоретическая механика». В пособии приведены краткий теоретический материал и примеры решения задач.

Составители:	Садыков В.А., проф., канд. техн. наук Имаева Э.Ш., доц., канд. техн. наук
--------------	--

Рецензент	Загорский В.К., проф., д-р техн. наук
-----------	---------------------------------------

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Динамика точки	5
1.1. Основные законы динамики	5
1.2. Дифференциальные уравнения движения точки	5
1.3. Первая основная задача динамики	6
1.4. Вторая основная задача динамики	9
1.5. Динамика относительного движения	19
2. Динамика механической системы	25
2.1. Центр масс механической системы	25
2.2. Моменты инерции твердого тела	27
2.3. Общие теоремы динамики	31
2.3.1. Теорема о движении центра масс	31
2.3.2. Количество движения точки и системы	34
2.3.3. Импульс силы	38
2.3.4. Теорема об изменении количества движения	40
2.3.5. Теорема об изменении момента количества движения (кинетического момента)	43
2.3.6. Кинетическая энергия точки и системы	51
2.3.7. Работа силы	54
2.3.8. Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы	57
2.4. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела	64
3. Основы аналитической механики	67
3.1. Принцип Даламбера	67
3.2. Возможные перемещения, идеальные связи	74
3.3. Принцип возможных перемещений	75
3.4. Общее уравнение динамики	85
3.5. Обобщенные координаты	85
3.6. Обобщенные силы	86
3.7. Уравнения Лагранжа второго рода	96
Список использованных источников	108

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для оказания методической помощи студентам при выполнении контрольных работ и расчетно-графических заданий по разделу «Динамика» модуля «Теоретическая механика». В пособии приведены основные понятия и определения динамики точки, динамики механической системы и основы аналитической механики, подробно разобраны примеры решения задач.

Данное пособие не исключает изучение курса по учебникам, в которых более подробно изложены понятия, определения и доказательства теорем, что способствует развитию логического мышления и более успешному закреплению материала, необходимого для изучения родственных дисциплин («Сопротивление материалов», «Детали машин», «Прикладная механика» и т.д.).

1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1.1. Основные законы динамики

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил. Базой этого раздела являются законы, впервые полностью сформулированные Исааком Ньютоном в 1687 г. в его трактате «Математические начала натуральной философии» (перевод академика А.Н. Крылова, 1915-1916 гг.).

1. Закон инерции. Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие каких-то сил не изменит этого состояния.

2. Основной закон динамики. Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одно с ней направление.

3. Закон равенства действия и противодействия. Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

4. Закон независимости действия сил. Материальная точка под действием нескольких сил приобретает ускорение, равное геометрической сумме ускорений, которые она получила бы от действия каждой силы, действующей независимо от других сил.

Анализ этих законов, их различная математическая интерпретация позволяют сформулировать ряд теорем и принципов механики для точки и механической системы.

1.2. Дифференциальные уравнения движения точки

Второй и четвертый законы динамики позволяют записать основное уравнение динамики точки

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i, \quad (1.1)$$

где m – масса материальной точки (в классической механике считается постоянной величиной), кг;

$\bar{a}$ – ускорение точки, м/с²;

$\sum \bar{F}_i = \bar{F}$ – равнодействующая сил, действующих на точку, Н.

В зависимости от заданного закона движения точки или от условий решаемой задачи данное уравнение можно представить в векторной форме

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_i \quad (1.2)$$

или спроецировать на оси декартовых или естественных координат.

В проекции на оси декартовых координат:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{ix}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{iy}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{iz}. \quad (1.3)$$

Проекции ускорения на соответствующие оси:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Проекции сил на оси декартовых координат:

$$\sum F_{ix} = \sum X_i, \quad \sum F_{iy} = \sum Y_i, \quad \sum F_{iz} = \sum Z_i.$$

Проекции основного уравнения динамики на естественные оси координат:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{i\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{in}, \quad 0 = \sum F_{ib}, \quad (1.5)$$

где $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ – направляющие орты соответственно касательной, нормали и бинормали;

$\frac{dv}{dt} = a_\tau$ – касательное ускорение; $\frac{v^2}{\rho} = a_n$ – нормальное ускорение;

$a_b = 0$ – полное ускорение всегда лежит в плоскости, проходящей через касательную и нормаль, и на бинормаль не проецируется.

1.3. Первая основная задача динамики

Полученные дифференциальные уравнения движения точки позволяют решать две основные задачи динамики.

Первая задача динамики заключается в том, чтобы по заданным массе и закону движения точки найти равнодействующую приложенных к точке сил (или одну из составляющих сил). Решение задачи сводится к составлению дифференциального уравнения движения, определению ускорения по заданному закону движения и нахождению искомой величины. В зависимости от закона движения дифференциальные уравнения имеют вид (1.3) или (1.5).

Пример 1.1

Движение точки массой m определяется уравнениями

$$x = (4 + 3\cos\frac{\pi}{3}t) \text{ м}, \quad y = (2 - 3\sin\frac{\pi}{3}t) \text{ м}, \quad z = 0.$$

В момент времени $t = 1\text{ с}$ определить равнодействующую сил, приложенных к точке.

Решение

Закон движения задан координатным способом, поэтому для определения силы используем формулы (1.3)

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y.$$

При заданных условиях задачи

$$\ddot{x} = -\frac{\pi^2}{3}\cos\frac{\pi}{3}t \text{ м/с}^2,$$

$$F_x = -m\frac{\pi^2}{3}\cos\frac{\pi}{3}t \text{ Н};$$

$$\ddot{y} = \frac{\pi^2}{3}\sin\frac{\pi}{3}t \text{ м/с}^2,$$

$$F_y = m\frac{\pi^2}{3}\sin\frac{\pi}{3}t \text{ Н}.$$

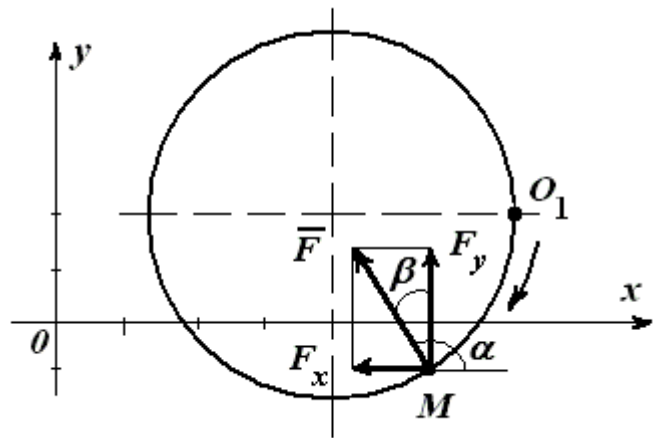


Рис. 1.1

В момент времени $t = 1\text{ с}$

$$F_x = -m\frac{\pi^2}{6} \text{ Н}, \quad F_y = m\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}} \text{ Н};$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(-m\frac{\pi^2}{6}\right)^2 + \left(m\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}\right)^2} = m\frac{\pi^2}{3} \text{ Н}.$$

Направление действия силы определяется с помощью направляющих косинусов (рис. 1.1):

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = 120^\circ, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta = 30^\circ.$$

Из заданного закона движения следует, что точка движется в плоскости xOy по окружности радиуса 3 м (рис. 1.1). Положение ее в момент времени $t = 1$ с определяется координатами $x = 5,5$ м; $y = -0,6$ м. Точка движется из точки O_1 по ходу часовой стрелки. На рис. 1.1 показана действующая на точку сила и углы, которые вектор силы составляет с осями координат.

Пример 1.2

Точка массой m , подвешенная на нити длиной 1 м в неподвижной точке O , описывает окружность в горизонтальной плоскости, двигаясь со скоростью 2,21 м/с (рис. 1.2). Определить натяжение нити и угол отклонения нити от вертикали.

Решение

В задаче известны траектория движения точки и скорость движения по траектории, поэтому дифференциальные уравнения движения могут быть записаны в проекции на естественные оси (направляющими осей являются орты $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$). На точку действуют сила тяжести и сила натяжения нити T .

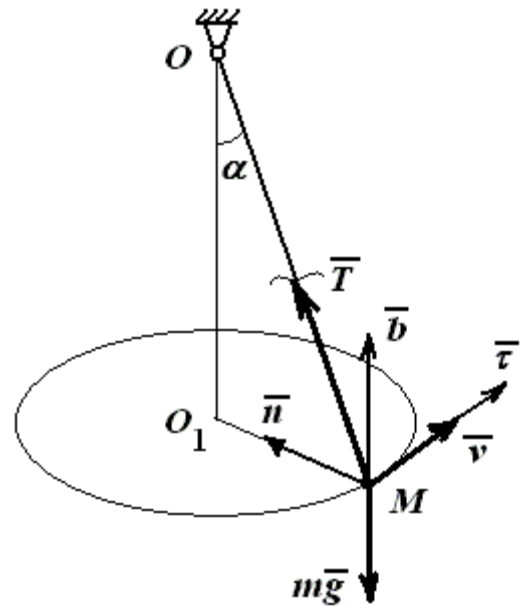


Рис. 1.2

Уравнения движения в естественных осях:

$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad m \frac{v^2}{R} = T \sin \alpha, \quad 0 = T \cos \alpha - mg.$$

Постоянство скорости ($a_\tau = 0$) подтверждает отсутствие сил, проецирующихся на касательную к траектории. Из уравнений определяются и сила натяжения нити, и угол α :

$$T = \frac{mg}{\cos \alpha}; \quad m \frac{v^2}{R} = \frac{mg}{\cos \alpha} \sin \alpha; \quad R = OM \sin \alpha;$$

$$v^2 = g \cdot OM \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = g \cdot OM \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}; \quad \cos^2 \alpha + \frac{v^2}{g \cdot OM} \cos \alpha - 1 = 0;$$

$$\cos \alpha = 0,23; \quad T = \frac{mg}{\cos \alpha} = 42,6m.$$

1.4. Вторая основная задача динамики

Вторая задача динамики заключается в том, чтобы по действующим на точку силам найти закон ее движения. Решение задачи сводится к интегрированию уравнений (1.2), (1.3) или (1.5), в которых неизвестными функциями являются координаты движущейся точки, а аргументом – время. Интегрирование уравнений производится методами, зависящими от вида полученного уравнения, т.к. в правой его части действующие силы могут содержать время, скорость, текущие координаты точки или совокупность этих параметров. Конечные решения зависят также и от начальных условий, т.е. от начального положения и начальной скорости точки. Например, под действием силы тяжести в зависимости от начальной скорости и ее направления точка может двигаться по прямой или кривой линии. Поэтому, используя начальные условия, можно получить единственное решение уравнений (1.2), (1.3) и (1.5).

При решении задач возможна следующая последовательность выполнения этапов решения:

- выделяется тело (точка), движение которого рассматривается;
- показываются все действующие на тело (точку) внешние силы, связи заменяются их реакциями;
- в выбранной системе отсчета составляются уравнения движения;
- записываются начальные условия (начальное положение, начальная скорость);
- решаются полученные уравнения.

Пример 1.3

Тяжелую точку толкнули вниз по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В начальный момент скорость точки v_0 , коэффициент трения скольжения f . Какова будет скорость точки, прошедшей путь s ? За какое время точка пройдет этот путь?

Решение

На рис. 1.3 показана точка M , движущаяся вниз по наклонной плоскости со скоростью $\bar{v}$. На точку действуют: сила тяжести $\bar{G}$, нормальная реакция плоскости $\bar{N}$, сила трения $\bar{F}_{mp}$. В системе отсчета xOy составляем уравнение движения по оси Ox и уравнение равновесия по оси Oy :

$$ma_x = G \sin \alpha - F_{mp};$$

$$0 = -G \cos \alpha + N.$$

В начальный момент времени точка имела координаты $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$; начальная скорость v_0 направлена вдоль оси x .

С учетом второго уравнения определяем силу трения:

$$F_{mp} = f \cdot N = f mg \cos \alpha.$$

Первое уравнение удобнее интегрировать методом разделения переменных, поэтому запишем его в виде

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha. (*)$$

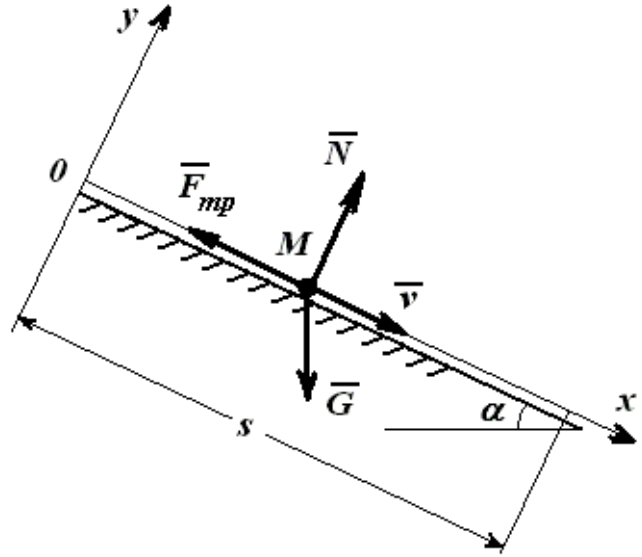


Рис. 1.3

Сократив на массу и разделив переменные, получим

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t g(\sin \alpha - f \cos \alpha) dt.$$

С учетом начальных условий

$$v - v_0 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t. (**)$$

Скорость точки в промежуточный момент времени $v = \frac{dx}{dt}$. Из уравнения (**) получим

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t [v_0 + g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t] dt.$$

После интегрирования при $x_0 = 0$ получим закон движения точки

$$x = v_0 t + g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{t^2}{2}. (***)$$

Подставив в уравнение (***) пройденный путь s и решив квадратное уравнение, найдем время движения точки T . Используя затем уравнение (**), определим скорость точки в момент времени T .

Скорость точки можно определить и иначе: в уравнении (*) заменяем $\frac{dv}{dt}$ на $\frac{v dv}{dx}$ ($\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{v dv}{dx}$), подставляем в уравнение (*)

$$m \frac{v dv}{dx} = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha; \quad \int_{v_0}^v v dv = \int_0^x g(\sin \alpha - f \cos \alpha) dx;$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)x; \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2g(\sin \alpha - f \cos \alpha)x}.$$

Тогда скорость точки в конечный момент времени

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(\sin \alpha - f \cos \alpha)s}.$$

Пример 1.4

Тело весом P , брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под действием силы тяжести и падает на уступ, возвышающийся на высоте h по отношению к начальной точке. Определить закон движения тела, максимальные высоту H и дальность полета s .

Решение

На рис. 1.4 показано движущееся в системе отсчета xOy тело M . На него действует сила тяжести P . В начальный момент времени тело находилось в начале отсчета ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$), проекции начальной скорости на оси координат: $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$, $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$. Поскольку траектория точки неизвестна, то дифференциальные уравнения движения запишем в проекции на оси Ox и Oy по формулам (1.3):

$$\frac{P}{g} \frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{P}{g} \frac{dv_y}{dt} = -P.$$

Решаем полученные уравнения:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0; \quad v_x = \text{const}; \quad v_x = v_{x0} = v_0 \cos \alpha; \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha;$$

$$\int dx = \int v_0 \cos \alpha dt; \quad x = v_0 t \cos \alpha + C_1.$$

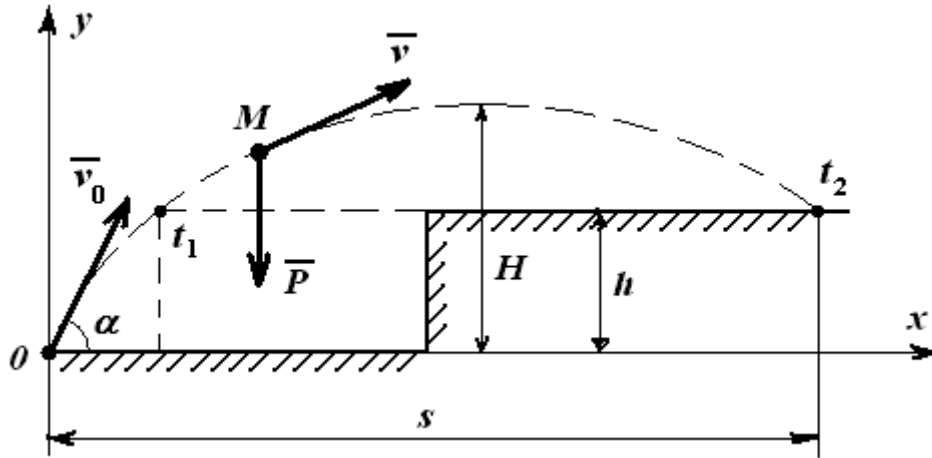


Рис. 1.4

С учетом начальных условий: $x_0 = 0 = v_0 \cdot 0 \cdot \cos \alpha + C_1, \Rightarrow C_1 = 0$;

$x = v_0 t \cos \alpha$ – закон движения тела по оси Ox .

$$\frac{dv_y}{dt} = -g; \quad \int dv_y = \int -g dt; \quad v_y = -gt + C_2.$$

С учетом начальных условий $v_{y0} = v_0 \sin \alpha, \Rightarrow C_2 = v_0 \sin \alpha$;

$v_y = -gt + v_0 \sin \alpha$ – закон изменения скорости тела по оси Oy .

$$v_y = \frac{dy}{dt}; \quad \int dy = \int (-gt + v_0 \sin \alpha) dt;$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + C_3, \quad \text{при } t = 0, y_0 = 0, \Rightarrow C_3 = 0;$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \text{ – закон движения тела по оси } Oy.$$

В данном примере использовались неопределенные интегралы; константы C_1, C_2, C_3 определялись с учетом начальных условий. Исключив из уравнений движения время t , можно получить уравнение траектории – параболы:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}, \quad y = x \operatorname{tg} \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Максимальная высота H определится при условии: в верхней точке параболы скорость, направленная по касательной к траектории, горизонтальна, т.е. $v_y = 0$,

$$-gt + v_0 \sin \alpha = 0; \quad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Подставляя полученное время в уравнение движения по оси Oy , находим высоту H :

$$H = y_{\max} = v_0 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \sin \alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2; \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Приравняв в законе движения по вертикали $y = h$, найдем время падения тела на уступ (при решении квадратного уравнения получаем два корня t_1 и t_2 ; это же следует и из рис. 1.4: линия, проведенная на высоте h , параллельна оси Ox и пересекает параболу в двух точках). Подставив это время в уравнение движения по оси Ox , получим дальность полета $s = v_0 t_2 \cos \alpha$.

В первом и во втором примерах действующие силы постоянные, поэтому переменные при интегрировании легко разделяются. Похожим образом решаются задачи в случае сил, зависящих от времени. Далее рассматриваются задачи, в которых силы зависят от скорости и перемещения точки (разделение переменных происходит иначе).

Пример 1.5

Тело весом P , брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха $R = kPv$ (k – коэффициент пропорциональности, P – вес тела, v – текущая скорость). Определить закон движения тела.

Решение

В задаче неизвестна траектория движения тела, поэтому уравнения движения будем искать в проекциях на оси декартовых координат (формулы (1.3)). На рис. 1.5 показано положение движущегося тела в произвольный момент времени и действующие на него силы.

Выбранная система отсчета позволяет выписать начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$, $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$.

Дифференциальные уравнения движения тела в проекции на оси декартовых координат:

$$\begin{aligned} ma_x &= -R_x, \\ ma_y &= -P - R_y \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\frac{P}{g} \frac{dv_x}{dt} = -kPv_x,$$

$$\frac{P}{g} \frac{dv_y}{dt} = -P - kPv_y.$$

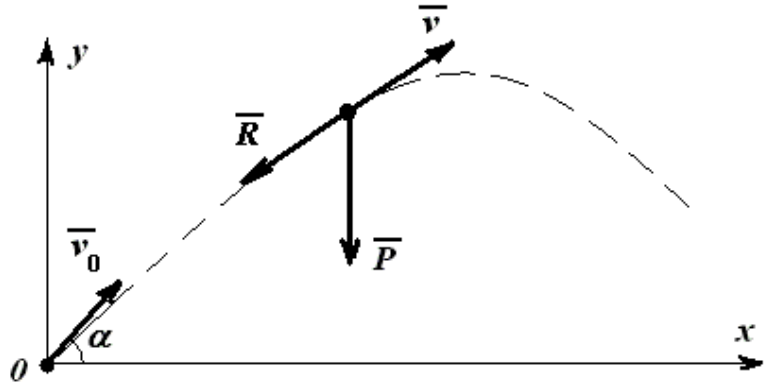


Рис. 1.5

Движение по оси Ox :

$$\frac{dv_x}{dt} = -kgv_x.$$

После разделения переменных интегрируем:

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = \int -kg dt; \quad \ln v_x = -kgt + C_1;$$

при $t = 0$: $v_x = v_{x0} = v_0 \cos \alpha$; $\ln v_0 \cos \alpha = -kg \cdot 0 + C_1$; $C_1 = \ln v_0 \cos \alpha$;

$$\ln v_x = -kgt + \ln v_0 \cos \alpha; \quad \ln \frac{v_x}{v_0 \cos \alpha} = -kgt;$$

$v_x = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-kgt}$ – закон изменения скорости по оси Ox ;

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad \int dx = \int v_0 \cos \alpha \cdot e^{-kgt} dt; \quad x = -\frac{1}{kg} v_0 \cos \alpha \cdot e^{-kgt} + C_2;$$

при $t = 0$: $x_0 = 0$, $0 = -\frac{1}{kg} v_0 \cos \alpha \cdot e^{-kg \cdot 0} + C_2$; $C_2 = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg}$;

$$x = -\frac{v_0 \cos \alpha}{kg} \cdot e^{-kgt} + \frac{v_0 \cos \alpha}{kg}$$

или $x = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt})$ – закон движения по оси Ox .

Движение по оси Oy :

$$\frac{dv_y}{dt} = -g(1 + kv_y).$$

После разделения переменных интегрируем:

$$\int \frac{dv_y}{1 + kv_y} = \int -g dt; \quad \ln(1 + kv_y) = -kgt + C_3;$$

при $t = 0$: $v_y = v_{y0} = v_0 \sin \alpha$; $\ln(1 + kv_0 \sin \alpha) = -kg \cdot 0 + C_3$;

$$C_3 = \ln(1 + kv_0 \sin \alpha);$$

$$\ln(1 + kv_y) = -kgt + \ln(1 + kv_0 \sin \alpha); \quad \ln \frac{1 + kv_y}{1 + kv_0 \sin \alpha} = -kgt;$$

$$v_y = \frac{1}{k} \left[(1 + kv_0 \sin \alpha) e^{-kgt} - 1 \right] - \text{закон изменения скорости по оси } Oy.$$

Далее $v_y = \frac{dy}{dt}$, $\int dy = \int \frac{1}{k} \left[(1 + kv_0 \sin \alpha) e^{-kgt} - 1 \right] dt$;

$$y = \frac{1}{k} \left[(1 + kv_0 \sin \alpha) \cdot \left(-\frac{1}{kg} \right) e^{-kgt} - t \right] + C_4;$$

при $t = 0$: $y_0 = 0$, $C_4 = \frac{1}{k^2 g} (1 + kv_0 \sin \alpha)$;

$$y = -\frac{1}{k^2 g} (1 + kv_0 \sin \alpha) \cdot e^{-kgt} - \frac{t}{k} + \frac{1}{k^2 g} (1 + kv_0 \sin \alpha);$$

$$y = \frac{1}{k^2 g} (1 + kv_0 \sin \alpha) \cdot (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k} - \text{закон движения по оси } Oy.$$

Пример 1.6

Груз массой m , подвешенный к пружине с жесткостью c , находился в положении равновесия, затем его сдвинули вниз на величину x_0 и толкнули вниз со скоростью $\dot{x}_0$. Найти закон движения груза.

Решение

На рис. 1.6: l_0 – длина пружины в свободном состоянии, λ_{cm} – удлинение пружины при подвешенном грузе ($\lambda_{cm} = \frac{mg}{c}$), O – положение статического равновесия, x – координата груза по оси Ox (груз качается на пружине). Полное удлинение пружины $x + \lambda_{cm}$, восстанавливающая сила (сила упругости растянутой пружины) $F = c(x + \lambda_{cm})$. Начальные условия: при $t = 0$ $x = x_0$, $v_0 = \dot{x}_0$. Дифференциальное уравнение движения груза по вертикали

$$ma_x = mg - F, \quad m \frac{dv_x}{dt} = mg - c(x + \lambda_{cm}) = -cx,$$

т.к. в положении равновесия $c\lambda_{cm} = mg$.

В уравнении $m \frac{dv_x}{dt} = -cx$ (*) три переменные величины. Чтобы проинтегрировать методом разделения переменных, нужно одну из них исключить. Например,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{v_x dv_x}{dx}.$$

Получим следующее уравнение:

$$\frac{v_x dv_x}{dx} = -\frac{c}{m} x = -k^2 x.$$

Далее интегрируем

$$\int v_x dv_x = \int -k^2 x dx; \quad \frac{v_x^2}{2} = -\frac{k^2 x^2}{2} + C_1;$$

при $t = 0$: $x = x_0$; $v_x = v_0 = \dot{x}_0$; $C_1 = \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \frac{k^2 x_0^2}{2};$

$$v_x = \sqrt{-k^2 x^2 + (\dot{x}_0^2 + k^2 x_0^2)} = \sqrt{-k^2 x^2 + b^2}, \quad \text{где } b^2 = \dot{x}_0^2 + k^2 x_0^2;$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - k^2 x^2}} = \int dt; \quad \arcsin \frac{kx}{b} = kt + C_2.$$

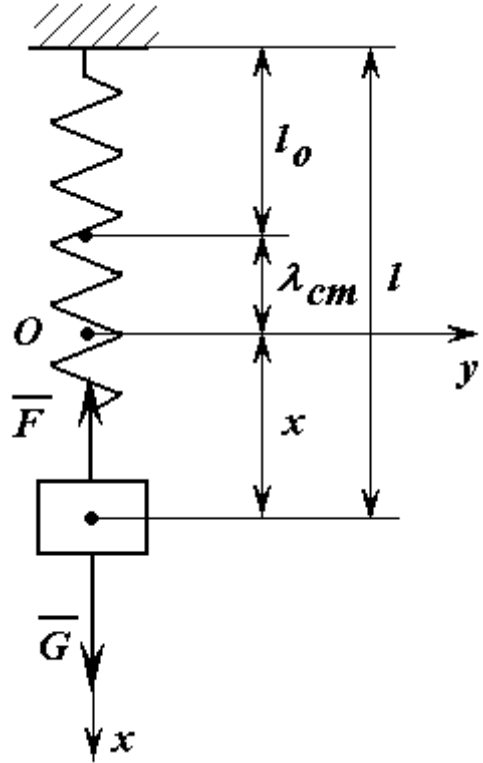


Рис. 1.6

С учетом начальных условий

$$C_2 = \arcsin \frac{kx_0}{b} = \beta; \quad \arcsin \frac{kx}{b} = kt + \beta; \quad \frac{kx}{b} = \sin(kt + \beta);$$

$$x = \frac{b}{k} \sin(kt + \beta).$$

Полученное уравнение является уравнением колебательного движения точки, которое можно представить в виде

$$x = A \sin(kt + \beta),$$

где $A = \frac{b}{k} = \frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + k^2 x_0^2}}{k} = \sqrt{\frac{\dot{x}_0^2}{k^2} + x_0^2}$ – амплитуда колебаний;

$$\beta = \arcsin \frac{kx_0}{\sqrt{\dot{x}_0^2 + k^2 x_0^2}} \text{ – фаза колебаний.}$$

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$

Решение уравнения (*) можно представить иначе, если произвести замену $\frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}$:

$$m\ddot{x} = -cx; \quad \ddot{x} = -\frac{c}{m}x = -k^2x$$

или $\ddot{x} + k^2x = 0$ – это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Общее решение такого уравнения записывается в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем уравнение для скорости

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$$

Воспользовавшись начальными условиями (при $t = 0$), решим систему двух уравнений:

$$x_0 = C_1 \cos(k \cdot 0) + C_2 \sin(k \cdot 0);$$

$$\dot{x}_0 = -kC_1 \sin(k \cdot 0) + kC_2 \cos(k \cdot 0);$$

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Закон движения груза примет вид

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt.$$

Приведем полученное уравнение к более удобному виду. Примем $C_1 = A \sin \beta$, $C_2 = A \cos \beta$.

$$x = A \sin \beta \cos kt + A \cos \beta \sin kt \quad \text{или} \quad x = A \sin(kt + \beta).$$

Для определения A и β воспользуемся значениями C_1 и C_2 :

$$x_0 = A \sin \beta; \quad \frac{\dot{x}_0}{k} = A \cos \beta.$$

Тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{x_0 k}{\dot{x}_0}; \quad A = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2 + x_0^2}; \quad \sin \beta = \frac{x_0}{A} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}};$

$$\cos \beta = \frac{\dot{x}_0}{Ak} = \frac{\dot{x}_0}{k \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}} = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{k^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2}},$$

т.е. результаты первого и второго вариантов решения идентичны.

1.5. Динамика относительного движения

Законы Ньютона сформулированы для движения тел по отношению к неподвижным системам отсчета; таких систем в природе не существует. Дифференциальное уравнение движения тела по отношению к движущейся системе отсчета записывается иначе, чем в формуле (1.2). В кинематике сложного движения абсолютное ускорение – это сумма переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_K.$$

Подставляя это выражение в формулу (1.2), получим

$$m(\bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_K) = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad \text{или} \quad m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_K).$$

Примем обозначения: $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ – переносная сила инерции; $\bar{\Phi}_K = -m\bar{a}_K$ – кориолисова сила инерции.

Дифференциальное уравнение относительного движения

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_K. \quad (1.6)$$

Для тела, лежащего на поверхности Земли, формула (1.6) записывается в виде

$$0 = \sum \bar{F}_i + \bar{\Phi}_e. \quad (*)$$

Относительное ускорение, относительная скорость тела и, следовательно, кориолисова сила инерции равны нулю.

Переносная сила инерции для неподвижного тела

$$\bar{\Phi}_e = m\bar{a}_e = m\omega^2 R \cos \alpha,$$

где R – радиус Земли;

α – широта местности;

$a_e = a_e^n = \omega^2 R \cos \alpha$ – нормальное ускорение точки на поверхности Земли.

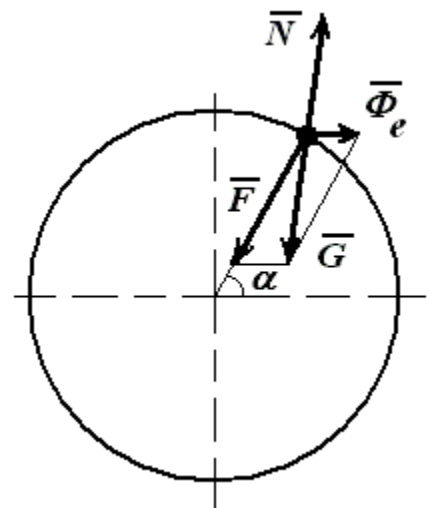


Рис. 1.7

Равнодействующая сил $\sum \bar{F}_i$ включает в себя гравитационную силу $\bar{F}$ и реакцию опоры $\bar{N}$ (рис. 1.7). Гравитационная сила

$$F = \gamma \frac{m M}{R^2},$$

где γ – гравитационная постоянная;
 m – масса тела;
 M, R – масса и радиус Земли.

Из выражения (*) получаем $0 = \bar{F} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e$, т.е. результатом сложения сил $\bar{F}$ и $\bar{\Phi}_e$ является сила, равная по величине и направленная противоположно силе $\bar{N}$, – сила тяжести или вес тела $\bar{G}$: $\bar{G} = -\bar{N} = \bar{F} + \bar{\Phi}_e$.

Для точек, лежащих на поверхности вращающейся Земли, нормальное ускорение изменяется от нуля (на полюсах) до максимального значения (на экваторе). Сплюснутость земной сферы влияет на величину гравитационной силы. Эти два фактора, в свою очередь, влияют на вес тела: на полюсах вес тела больше, на экваторе – меньше. Представляя силу тяжести как произведение массы на ускорение силы тяжести $\bar{G} = m\bar{g}$, можно связать изменение веса с изменением ускорения g . На полюсах $g = 9,83$ м/с², на экваторе $g = 9,78$ м/с², на средних широтах в расчетах принимают $g = 9,81$ м/с². При решении задач о движении тел относительно Земли переносная сила инерции учитывается в силе тяжести, т.е. в первом слагаемом формулы (1.6).

Если переносное движение поступательное, равномерное и прямолинейное то формула (1.6) принимает вид $m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_i$, откуда следует, что движение тела по отношению к подвижной системе отсчета, движущейся поступательно, равномерно и прямолинейно описывается такими же уравнениями, как и по отношению к неподвижной системе отсчета. Этот постулат, отмеченный еще Галилеем, выражает *принцип относительности классической механики*: *никакие механические явления, происходящие в среде, не могут обнаружить ее поступательного, равномерного и прямолинейного движения*.

Пример 1.7

Трубка **AB** вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, составляя с ней неизменный угол $\alpha = 45^\circ$. В трубке находится шарик **M** массой m (рис. 1.8). Определить закон относительного движения шарика в трубке, если его начальная скорость равна нулю и в начальный момент он находился на расстоянии $OM_0 = l$ от точки **O**, находящейся на оси вращения.

Решение

Шарик M совершает сложное движение: относительное (движется вдоль трубки) и переносное (вращается вместе с трубкой).

В произвольный момент времени на шарик действуют: сила тяжести $\bar{G}$, одна из составляющих реакций стенки трубки $\bar{N}_1$, переносная сила инерции $\bar{\Phi}_e$. Поскольку трубка вращается с постоянной скоростью, переносным ускорением точки M будет только нормальное ускорение, тогда

$$\Phi_e = m a_e^n = m \omega^2 x \sin \alpha,$$

где x – расстояние от точки O до текущего положения точки M по оси относительного движения Ox .

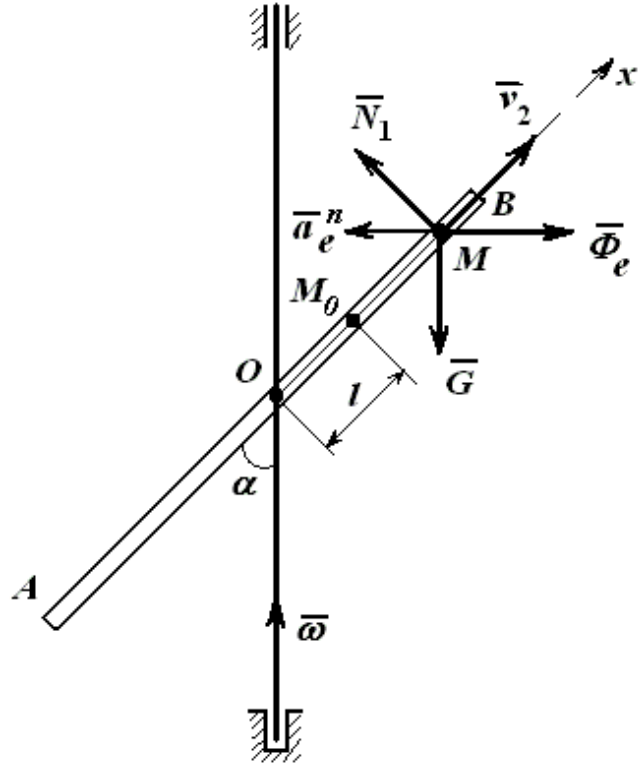


Рис. 1.8

При движении точки в положительном направлении оси Ox кориолисово ускорение направлено перпендикулярно плоскости рисунка и направлено от нас; в противоположную сторону (к нам) направлена кориолисова сила инерции $\Phi_K = m a_K = m \cdot 2\omega \cdot v_r \sin \alpha$ ($v_r = \dot{x}$ – относительная скорость точки). Кориолисова сила прижимает шарик к стенке трубки, вследствие чего возникает ответная реакция стенки трубки $\bar{N}_2$, которая равна по модулю кориолисовой силе инерции и направлена в противоположную сторону (от нас). То есть реакция стенки трубки имеет две составляющие $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ (на рис. 1.8 $\bar{N}_2$ и $\bar{\Phi}_K$ не показаны).

Составляем дифференциальное уравнение относительного движения шарика

$$m \bar{a}_r = \bar{G} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_K.$$

В проекции на ось Ox

$$m a_r = -mg \cos \alpha + \Phi_e \sin \alpha; \quad m \ddot{x} = -mg \cos \alpha + m \omega^2 x \sin \alpha \cdot \sin \alpha;$$

$$\ddot{x} - \omega^2 x \sin^2 \alpha = -g \cos \alpha \quad \text{или} \quad \ddot{x} - k^2 x = -g \cos \alpha, \quad (*)$$

где $k^2 = \omega^2 \sin^2 \alpha$.

Решать задачу можно двумя способами, как в примере 1.6.

Полученное уравнение является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Общее решение этого уравнения складывается из общего решения однородного уравнения ($\ddot{x} - k^2 x = 0$) и частного решения неоднородного уравнения: $x = x^* + x^{**}$.

x^* – общее решение однородного уравнения $\ddot{x} - k^2 x = 0$ имеет вид

$$x^* = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}.$$

Частное решение x^{**} ищем в виде константы C_3 и подставляем ее в исходное дифференциальное уравнение (*):

$$0 - k^2 C_3 = -g \cos \alpha; \quad C_3 = -\frac{g}{k^2} \cos \alpha = x^{**}.$$

Полное решение дифференциального уравнения

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k^2} \cos \alpha.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 возьмем производную от последнего выражения и получим систему двух уравнений с учетом начальных условий:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k^2} \cos \alpha, \\ \dot{x} = v = kC_1 e^{kt} - kC_2 e^{-kt}. \end{cases}$$

При $t = 0$: $x_0 = l$, $\dot{x}_0 = 0$;

$$\begin{cases} l = C_1 e^{k \cdot 0} + C_2 e^{-k \cdot 0} - \frac{g}{k^2} \cos \alpha, \\ 0 = kC_1 e^{k \cdot 0} - kC_2 e^{-k \cdot 0}, \end{cases} \quad C_1 = C_2 \quad \text{и} \quad C_1 = C_2 = l + \frac{g}{k^2} \cos \alpha.$$

Тогда решением уравнения (*) будет

$$x = (l + \frac{g}{k^2} \cos \alpha)(e^{kt} + e^{-kt}) - \frac{g}{k^2} \cos \alpha$$

или

$$x = 2(l + \frac{g}{k^2} \cos \alpha) \cdot \operatorname{ch} kt - \frac{g}{k^2} \cos \alpha.$$

Подставляя заданные в условии задачи величины

$$k^2 = \omega^2 \sin^2 \alpha = \omega^2 \sin^2 45^\circ = \omega^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\omega^2}{2}, \quad \cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

получим закон движения шарика в трубке

$$x = 2 \left(l + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{\omega}{\sqrt{2}} t \right) - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$$

Пример 1.8

Точка M массой m (рис. 1.9) начала двигаться со скоростью $v_0 = 3$ м/с по шероховатому цилиндрическому каналу тела A , движущемуся в вертикальных направляющих по закону $z = 2t^3$, м. Найти закон движения точки и время движения ее до остановки, если коэффициент трения $f = 0,1$.

Решение

Точка M совершает сложное движение: относительное (перемещение по телу A) и переносное (вместе с телом A вдоль вертикальных направляющих). На точку действуют: сила тяжести $\vec{G}$, нормальная реакция стенок канала $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{mp}$ и переносная сила инерции $\vec{\Phi}_e$. Кориолисова сила инерции отсутствует, т.к. переносное движение – поступательное. Дифференциальное уравнение относительного движения

$$m\vec{a}_r = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} + \vec{\Phi}_e.$$

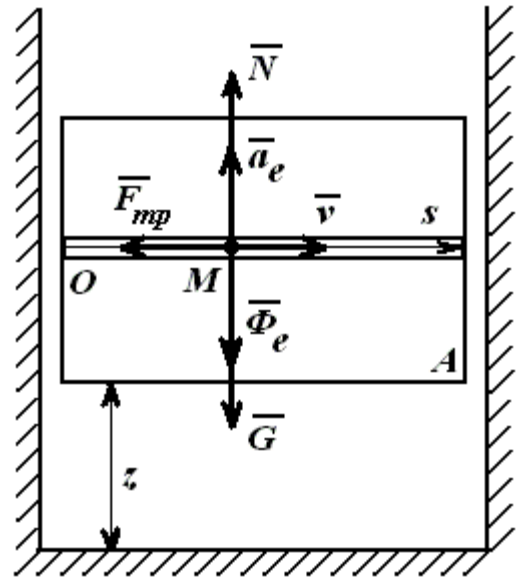


Рис. 1.9

В проекции на ось s

$$m \frac{dv_r}{dt} = -F_{mp},$$

где v_r – относительная скорость;

$$F_{mp} = f N = f(G + \Phi_e); \quad \Phi_e = m\ddot{z} = m \cdot 12t;$$

$$m \frac{dv_r}{dt} = -f(mg + m \cdot 12t); \quad \frac{dv_r}{dt} = -f(g + 12t).$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int dv_r = \int -f(g + 12t)dt; \quad v_r = -fgt - 12f \frac{t^2}{2} + C_1;$$

$$v_r = \frac{ds}{dt}; \quad \int ds = \int (-fgt - 6f \cdot t^2 + C_1)dt;$$

$$s = -\frac{1}{2} fgt^2 - 2f t^3 + C_1 t + C_2.$$

Подставляя начальные условия, определяем постоянные интегрирования:

$$v_0 = -fg \cdot 0 - 6f \cdot 0 + C_1; \quad C_1 = v_0;$$

$$0 = -\frac{1}{2} fg \cdot 0^2 - 2f \cdot 0^3 + C_1 \cdot 0 + C_2; \quad C_2 = 0.$$

Закон движения точки по каналу $s = v_0 t - \frac{1}{2} fgt^2 - 2f t^3.$

Скорость точки $v_r = v_0 - fgt - 6f t^2.$

Подставляя данные условия задачи, получим

$$s = 3t - 0,49t^2 - 0,2t^3 \text{ м.}$$

В момент остановки T скорость точки равна нулю:

$$0 = v_0 - fgT - 6f T^2,$$

решая это уравнение, определяем время остановки:

$$T^2 + \frac{g}{6} T - \frac{v_0}{6f} = 0, \quad T^2 + 1,63T - 5 = 0;$$

$T_1 = -3,19$ – не имеет смысла, $T_2 = 1,56$ с – время остановки точки.

2. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2.1. Центр масс механической системы

Механической системой (системой материальных точек) называется совокупность точек, положение и движение каждой из которых зависит от положения и движения других точек. Если перемещение точек не ограничено никакими связями, а обусловлено лишь действующими силами, то эту систему называют системой свободных точек. Если на точки системы наложены какие-либо связи, то это система несвободных точек. Силы, действующие на точки механической системы, делятся на внешние и внутренние.

Внешние силы $\bar{F}^e$ действуют на точки рассматриваемой системы со стороны точек (тел), не входящих в данную систему. Внутренние силы $\bar{F}^i$ – это силы взаимодействия между точками рассматриваемой системы. На основании закона равенства действия и противодействия сумма всех внутренних сил механической системы (главный вектор внутренних сил) равна нулю:

$$\bar{R}^i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0. \quad (2.1)$$

С учетом теоремы Вариньона и главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю.

Одним из параметров, связывающих распределение масс данной системы в выбранной системе отсчета, является центр масс. Это геометрическая точка, положение которой определяется формулами:

- в векторной форме

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{m}, \quad (2.2)$$

где $\sum m_k = m$ – масса всей системы;

- в проекциях на выбранные оси координат

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}, \quad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k}. \quad (2.3)$$

В поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести [7].

Пример 2.1

Определить положение центра тяжести однородной пластины (рис. 2.1).

Решение

Данную пластину можно представить как сумму полукруга, прямоугольника и треугольника. Их массы пропорциональны площадям S , поэтому разделив на удельную плотность числитель и знаменатель в формулах (2.2), получим

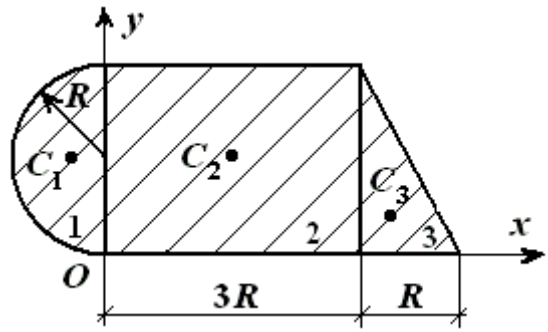


Рис. 2.1

$$x_c = \frac{\sum S_k x_k}{\sum S_k}, \quad y_c = \frac{\sum S_k y_k}{\sum S_k},$$

где S_k – площади отдельных элементов пластины;

x_k, y_k – координаты центров тяжести отдельных элементов пластины.

Для данной задачи
$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3}; \quad y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3};$$

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2}; \quad x_1 = -\frac{2}{3} \frac{R \sin(\pi/2)}{\pi/2} = -\frac{4R}{3\pi}; \quad y_1 = R;$$

$$S_2 = 2R \cdot 3R = 6R^2; \quad x_2 = 1,5R; \quad y_2 = R;$$

$$S_3 = \frac{1}{2} R \cdot 2R = R^2; \quad x_3 = 3R + \frac{1}{3} R = \frac{10}{3} R; \quad y_3 = \frac{1}{3} 2R = \frac{2}{3} R.$$

Подставим эти данные в формулы для определения центра тяжести:

$$x_c = \frac{\frac{\pi R^2}{2} \left(-\frac{4R}{3\pi} \right) + 6R^2 \cdot 1,5R + R^2 \cdot \frac{10}{3} R}{\frac{\pi R^2}{2} + 6R^2 + R^2} = \frac{11,66R^3}{8,57R^2} = 1,36R;$$

$$y_c = \frac{\frac{\pi R^2}{2} \cdot R + 6R^2 \cdot R + R^2 \cdot \frac{1}{3} R}{\frac{\pi R^2}{2} + 6R^2 + R^2} = \frac{7,9R^3}{8,57R^2} = 0,93R.$$

2.2. Моменты инерции твердого тела

Мерой инертности при вращательном движении механической системы или твердого тела являются моменты инерции, которые могут быть определены относительно полюса, оси или плоскости.

Моментом инерции твердого тела относительно полюса (оси, плоскости) называется сумма произведений элементарных масс, составляющих тело, на квадраты их расстояний до полюса (оси, плоскости). Размерность момента инерции – $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Полярный момент инерции

$$I_O = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (2.4)$$

Осевые моменты инерции:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum m_k (y_k^2 + z_k^2); \\ I_y &= \sum m_k (x_k^2 + z_k^2); \\ I_z &= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей:

$$\begin{aligned} I_{xOy} &= \sum m_k z_k^2; \\ I_{xOz} &= \sum m_k y_k^2; \\ I_{yOz} &= \sum m_k x_k^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Между моментами инерции относительно полюса, оси и плоскости существует зависимость:

$$I_O = I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz} = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z). \quad (2.7)$$

Если тело вращается вокруг оси, не проходящей через центр масс (рис. 2.2), то момент инерции вычисляется с помощью теоремы Штейнера-Гюйгенса (теоремы о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей):

$$I_{z1} = I_z + md^2, \quad (2.8)$$

где I_z – момент инерции относительно оси z , проходящей через центр масс; m – масса тела; d – расстояние между осями.

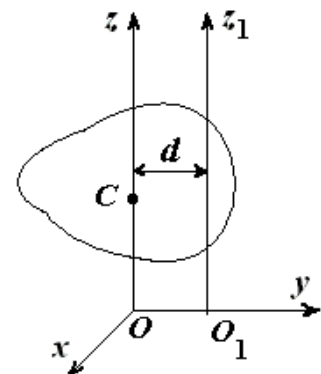


Рис. 2.2

На рис. 2.3 приведены примеры плоских и объемных однородных тел и их моменты инерции относительно осей, проходящих через центры масс.

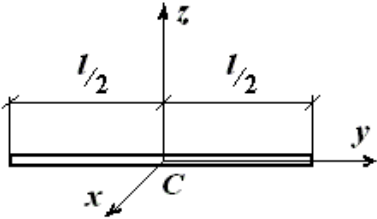
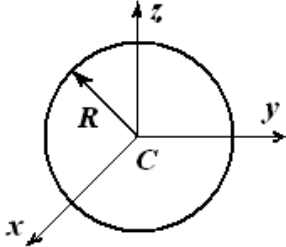
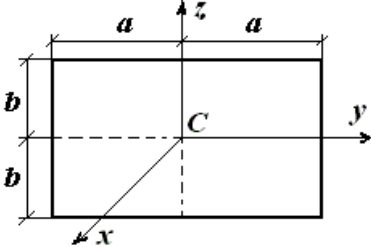
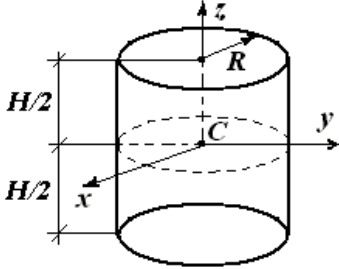
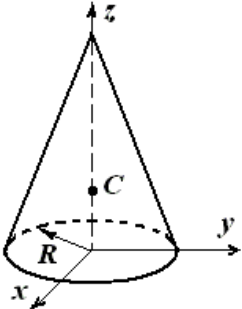
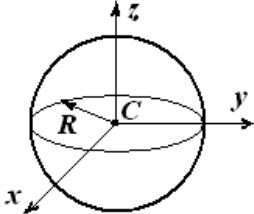
	тонкий однородный стержень: $I_x = I_z = \frac{ml^2}{12}$
	тонкий однородный диск: $I_x = \frac{mR^2}{2}, \quad I_y = I_z = \frac{mR^2}{4}$
	тонкая однородная пластина: $I_x = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}, \quad I_y = \frac{mb^2}{3}, \quad I_z = \frac{ma^2}{3}$
	однородный круглый цилиндр: $I_x = I_y = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right),$ $I_z = \frac{mR^2}{2}$
	однородный круговой конус: $I_z = 0,3mR^2$
	однородный шар: $I_x = I_y = I_z = 0,4mR^2$

Рис. 2.3

Для тел сложной конфигурации момент инерции можно определить по формуле

$$I_O = m\rho^2, \quad (2.9)$$

где ρ (иногда i) – радиус инерции – величина, определяемая экспериментально.

Пример 2.2

Определить момент инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной l , вращающегося вокруг оси, перпендикулярной плоскости вращения и проходящей через точку O , отстоящую от конца стержня на расстоянии $\frac{1}{3}l$ (рис. 2.4).

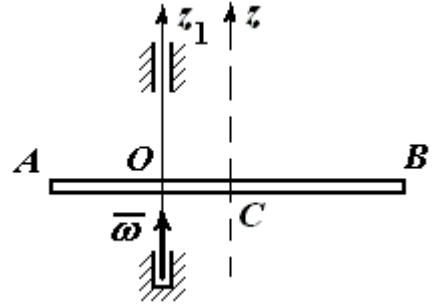


Рис. 2.4

Решение

Момент инерции стержня относительно оси Cz , проходящей через центр масс стержня – точку C ,

$$I_z = \frac{ml^2}{12}.$$

С учетом теоремы Штейнера-Гюйгенса $I_{z_1} = I_z + md^2$.

Расстояние между осями z и z_1

$$d = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6},$$

$$I_{z_1} = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}ml^2 = \frac{1}{9}ml^2.$$

Пример 2.3

Два одинаковых однородных стержня массой m и длиной l каждый соединены между собой под прямым углом (рис. 2.5). Определить момент инерции этой системы относительно оси, проходящей через конец A стержня перпендикулярно плоскости чертежа.

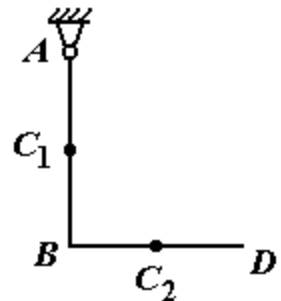


Рис. 2.5

Решение

Точки C_1 и C_2 – центры масс стержней. Момент инерции системы стержней

$$I_{zA} = I_{AB} + I_{BD};$$

$$I_{AB} = I_{zC_1} + m(AC_1)^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3};$$

$$I_{BD} = I_{zC_2} + m(AC_2)^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(l^2 + \frac{l^2}{4}\right) = \frac{8ml^2}{6};$$

$$I_{zA} = I_{AB} + I_{BD} = \frac{ml^2}{3} + \frac{8ml^2}{6} = \frac{5}{3}ml^2.$$

Пример 2.4

К однородному тонкому диску массой m и радиусом R прикреплена тяжелая точка A массой $2m$ (рис. 2.6). Определить момент инерции механической системы относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O .

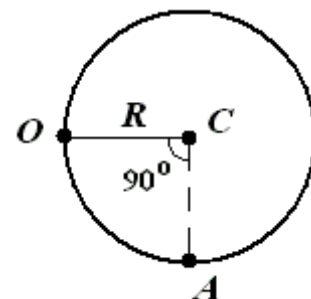


Рис. 2.6

Решение

Момент инерции системы $I_O = I_{\text{диска}} + I_A$.

Момент инерции диска

$$I_{\text{диска}} = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Момент инерции тяжелой точки

$$I_A = 2m \cdot (OA)^2 = 2m \cdot (R^2 + R^2) = 4mR^2.$$

Окончательно имеем

$$I_O = \frac{3}{2}mR^2 + 4mR^2 = 5,5mR^2.$$

2.3. Общие теоремы динамики

Общие теоремы динамики являются следствиями основных законов механики Ньютона, дополненными для несвободных механических систем аксиомой об освобождении связей. К общим теоремам относятся:

- теорема о движении центра масс;
- теорема об изменении количества движения;
- теорема об изменении момента количества движения (кинетического момента);
- теорема об изменении кинетической энергии.

2.3.1. Теорема о движении центра масс

Для каждой точки механической системы, находящейся под действием сил, может быть записано соотношение

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad (2.10)$$

где $\bar{F}_k^e$ – результирующая действующих на точку внешних сил;
 $\bar{F}_k^i$ – результирующая действующих на точку внутренних сил системы.

Просуммировав выражение для всех точек движущейся системы, получим

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i, \quad (2.11)$$

где $\sum m_k \bar{a}_k = \sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_k \bar{r}_k = \frac{d^2}{dt^2} (m \bar{r}_C) = m \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = m \bar{a}_C;$

$$\sum \bar{F}_k^e = \bar{R}^e \text{ – главный вектор внешних сил;}$$

$$\sum \bar{F}_k^i = \bar{R}^i = 0 \text{ – главный вектор внутренних сил.}$$

Из приведенных выражений следует теорема о движении центра масс

$$m \bar{a}_C = \bar{R}^e \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = \bar{R}^e, \quad (2.12)$$

т.е. центр масс системы движется как материальная точка под действием главного вектора внешних сил.

Внутренние силы не влияют на движение центра масс. Формулу (2.12) можно спроецировать на оси декартовой системы координат и получить три скалярных выражения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= R_x^e, \\ m\ddot{y}_C &= R_y^e, \\ m\ddot{z}_C &= R_z^e. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Формулы (2.12) и (2.13) представляют собой дифференциальные уравнения движения центра масс, т.е. описывают движение одной точки системы.

Из теоремы о движении центра масс вытекают **следствия**:

- если главный вектор внешних сил $\bar{R}^e = 0$, то $\bar{a}_C = 0$ и $\bar{v}_C = \text{const}$, т.е. центр масс движется с постоянной скоростью; если в начальный момент времени скорость центра масс $\bar{v}_C = 0$, то центр масс неподвижен;

- если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю (например, $R_x^e = 0$), то скорость центра масс в проекции на эту ось будет постоянной ($v_{Cx} = \dot{x}_C = \text{const}$); если эта проекция в начальный момент времени была равна нулю ($v_{Cx} = 0$), то и координата центра масс по этой оси не изменяется ($x_C = \text{const}$).

Пример 2.5

Сплошной однородный диск массой m_1 и радиусом R вместе с прикрепленной к его ободу тяжелой точкой A массой m_2 вращается в вертикальной плоскости вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс диска O , с угловой скоростью ω (рис. 2.7). Определить реакцию опоры в точке O .

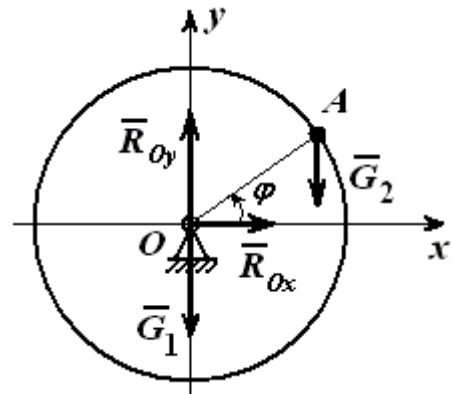


Рис. 2.7

Решение

Диск вращается по закону $\varphi = \omega t$. На механическую систему действуют силы тяжести $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$ и реакция опоры $\bar{R}_O$, которая имеет две составляющие в проекции на оси выбранной системы координат xOy . Уравнения движения центра масс в проекции на оси:

$$m\ddot{x}_C = R_{Ox}; \quad m\ddot{y}_C = -G_1 - G_2 + R_{Oy}; \quad m = m_1 + m_2.$$

Координаты центра масс

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 R \cos \omega t}{m} = \frac{m_2 R}{m} \cos \omega t;$$

$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 R \sin \omega t}{m} = \frac{m_2 R}{m} \sin \omega t.$$

Ускорение центра масс в проекции на оси координат

$$\ddot{x}_c = \frac{d^2 x_c}{dt^2} = -\frac{m_2 R \omega^2}{m} \cos \omega t; \quad \ddot{y}_c = \frac{d^2 y_c}{dt^2} = -\frac{m_2 R \omega^2}{m} \sin \omega t.$$

Подставляем последние выражения в уравнения движения:

$$-m \frac{m_2 R \omega^2}{m} \cos \omega t = R_{Ox}; \quad -m \frac{m_2 R \omega^2}{m} \sin \omega t = -G_1 - G_2 + R_{Oy};$$

$$R_{Ox} = -m_2 R \omega^2 \cos \omega t; \quad R_{Oy} = m_1 g + m_2 g - m_2 R \omega^2 \sin \omega t.$$

$$\text{Величина реакции опоры } R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2}.$$

Пример 2.6

Тело D массой m_1 покоится на гладкой горизонтальной плоскости. По каналу AB , составляющему угол α с горизонтом, из начала канала A начинает двигаться точка M массой m_2 по закону $AM = ut$ (рис. 2.8). Определить смещение l тела D .

Решение

Внешние силы, действующие на механическую систему, вертикальны, и их проекции на горизонтальную ось x равны нулю, следовательно, должно выполняться второе следствие из теоремы о движении центра масс: скорость v_{Cx} постоянна.

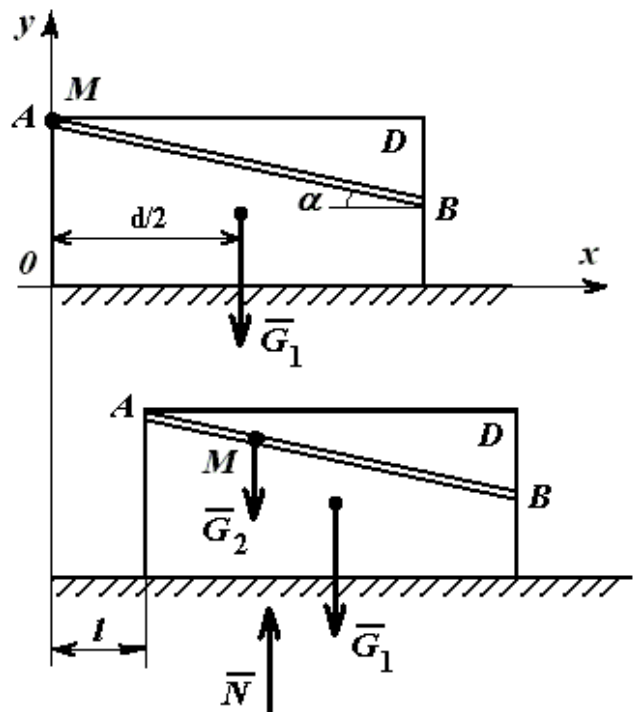


Рис. 2.8

В начальный момент система покоилась ($v_{Cx} = 0$), поэтому координата x_C не изменяется. Определим положение центра масс системы относительно оси x в начальный и конечный моменты времени:

$$x_{C_0} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot \frac{d}{2} + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \frac{d}{2}}{m_1 + m_2};$$

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot (l + \frac{d}{2}) + m_2 \cdot (l + ut \cos \alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку $x_{C_0} = x_C$, то

$$m_1 \frac{d}{2} = m_1 \cdot (l + \frac{d}{2}) + m_2 \cdot (l + ut \cos \alpha); \quad 0 = m_1 l + m_2 l + m_2 ut \cos \alpha;$$

$$l = -\frac{m_2 ut}{m_1 + m_2} \cos \alpha.$$

Знак минус говорит о том, что смещение тела D произойдет влево.

2.3.2. Количество движения точки и системы

Количество движения – одна из мер механического движения. Для точки эта величина определяется формулой

$$\bar{q} = m\bar{v} \text{ [кг}\cdot\text{м/с]}, \quad (2.14)$$

вектор количества движения направлен так же, как и вектор скорости точки.

Для механической системы:

$$\bar{Q} = \sum \bar{q}_k = \sum m_k \bar{v}_k; \quad (2.15)$$

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{r}_k = \frac{d}{dt} (m\bar{r}_C) = m \frac{d\bar{r}_C}{dt} = m\bar{v}_C;$$

$$\bar{Q} = m\bar{v}_C, \quad (2.16)$$

где $\bar{v}_C$ – скорость центра масс, m – масса системы.

Пример 2.7

Механическая система состоит из неподвижного колеса **1** радиуса R и массы m_1 , подвижного колеса радиуса r и массы m_2 и соединяющего оси колес кривошипа OA (рис. 2.9). Кривошип, являющийся однородным стержнем массы m_3 , вращается с угловой скоростью ω . Определить количество движения системы.

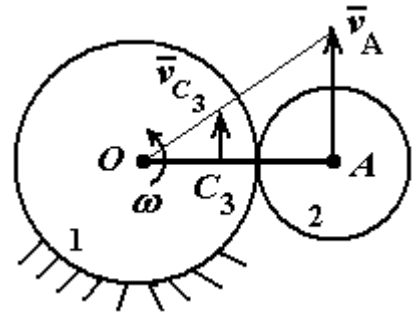


Рис. 2.9

Решение

Система состоит из трех тел, поэтому ее количество движения складывается из количеств движения каждого тела:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \bar{Q}_{OA};$$

$$\bar{Q}_1 = m_1 \bar{v}_{C_1} = m \bar{v}_0 = 0, \text{ т.к. центр масс колеса 1 неподвижен;}$$

$$Q_2 = m_2 v_A, \text{ где } v_A = \omega(R + r) \text{ – скорость центра масс колеса 2;}$$

$$Q_2 = m_2 \omega(R + r), \text{ вектор } \bar{Q}_2 \text{ направлен так же, как и вектор } \bar{v}_A;$$

$$Q_{OA} = m_3 v_{C_3} = m_3 \omega \frac{R + r}{2}.$$

Векторы $\bar{Q}_2$ и $\bar{Q}_{OA}$ имеют одинаковое направление, поэтому могут быть сложены алгебраически:

$$Q = Q_2 + Q_{OA} = m_2 \omega(R + r) + m_3 \omega \frac{R + r}{2} = \left(m_2 + \frac{m_3}{2} \right) \omega(R + r).$$

Пример 2.8

Кривошипно-шатунный механизм (рис. 2.10) состоит из кривошипа OA длиной r и массой m , шатуна AB длиной $l = 2r$ и массой $2m$ и ползуна B массой $3m$. Кривошип вращается в данный момент с угловой скоростью ω и составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с осью Ox . Определить количество движения системы в данный момент времени.

Решение

Количество движения системы, состоящей из трех движущихся деталей, определяется как сумма количеств движения каждой детали:

$$\bar{Q} = \bar{Q}_{OA} + \bar{Q}_{AB} + \bar{Q}_B; \quad (*)$$

$$\bar{Q}_{OA} = m_{OA} \bar{v}_{C_1}; \quad \bar{Q}_{AB} = m_{AB} \bar{v}_{C_2}; \quad \bar{Q}_B = m_B \bar{v}_B.$$

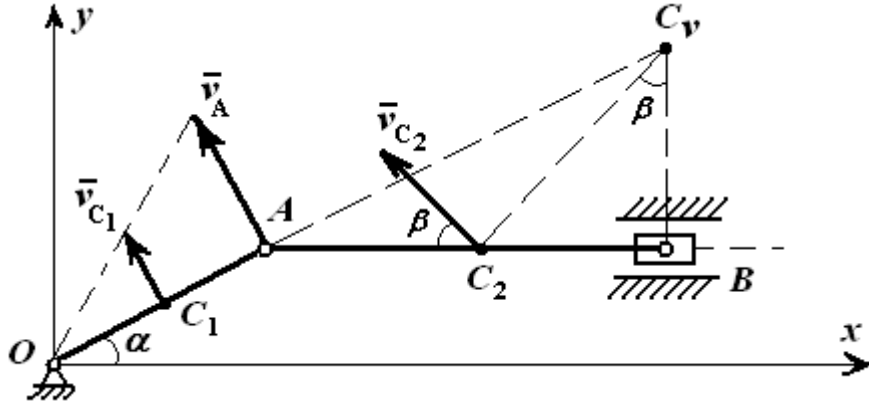


Рис. 2.10

Скорость центра масс кривошипа OA

$$v_{C_1} = \omega \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} \omega r.$$

Звено AB в данный момент времени вращается вокруг мгновенного центра скоростей C_v . Для скоростей точек A , C_2 , B можно составить пропорцию

$$\frac{v_A}{AC_v} = \frac{v_{C_2}}{C_2 C_v} = \frac{v_B}{BC_v} = \omega_{AB}.$$

Точка A принадлежит и шатуну и кривошипу. Ее скорость $v_A = \omega r$.

$$AC_v = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{2 \cdot 2r}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} r; \quad BC_v = AC_v \sin 30^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}} r \cdot \frac{1}{2} = \frac{2r}{\sqrt{3}};$$

$$C_2 C_v = \sqrt{(BC_2)^2 + (BC_v)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2} = r \sqrt{\frac{7}{3}};$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{\omega \cdot r \sqrt{3}}{4r} = \frac{\omega \sqrt{3}}{4}.$$

С учетом последних выражений найдем скорости центров масс шатуна и ползуна:

$$v_{C_2} = \omega_{AB} C_2 C_v = \frac{\omega \sqrt{3}}{4} \cdot r \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\omega \cdot r \sqrt{7}}{4};$$

$$v_B = \omega_{AB} B C_v = \frac{\omega \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{\omega r}{2};$$

$$\cos \beta = \frac{B C_v}{C_2 C_v} = \frac{2}{\sqrt{7}}; \quad \sin \beta = \frac{B C_2}{C_2 C_v} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Количество движения каждой детали механизма

$$Q_{OA} = m \frac{1}{2} \omega r = \frac{1}{2} m \omega r; \quad Q_{AB} = 2m \frac{\omega r \sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2} m \omega r;$$

$$Q_B = 3m \frac{\omega r}{2} = \frac{3}{2} m \omega r.$$

Векторы количеств движения деталей системы направлены так же, как и скорости их центров масс. Для аналитического сложения спроецируем выражение (*) на оси выбранной системы отсчета:

$$\begin{aligned} Q_x &= -Q_{OA} \cos(90^\circ - \alpha) - Q_{AB} \cos \beta + Q_B \cos 180^\circ = \\ &= -\frac{1}{2} m \omega r \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} m \omega r \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \right) - \frac{3}{2} m \omega r \cdot 1 = -\frac{11}{4} m \omega r; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_y &= Q_{OA} \cos \alpha + Q_{AB} \sin \beta + Q_B \cos 90^\circ = \\ &= \frac{1}{2} m \omega r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} m \omega r \sqrt{\frac{3}{7}} + 0 = \frac{3\sqrt{3}}{4} m \omega r; \end{aligned}$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{4} m \omega r \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} m \omega r \right)^2} = 3,04 m \omega r.$$

Направление вектора количества движения определяют углы, которые он составляет с осями координат:

$$\text{с осью } O_x: \quad \cos \gamma = \frac{Q_x}{Q} = \frac{-\frac{11}{4}m\omega r}{3,04m\omega r} = -0,91, \quad \gamma = 155^\circ;$$

$$\text{с осью } O_y: \quad \cos \varphi = \frac{Q_y}{Q} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}m\omega r}{3,04m\omega r} = 0,43, \quad \varphi = 65^\circ.$$

2.3.3. Импульс силы

Действие силы на материальную точку в течение малого промежутка времени характеризуется **элементарным импульсом силы**

$$\Delta \bar{S} = \bar{F} \cdot \Delta t, [\text{Н} \cdot \text{с}]. \quad (2.17)$$

Импульс силы за конечный промежуток времени

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt. \quad (2.18)$$

Если сила постоянна, то ее импульс $\bar{S} = \bar{F} \cdot t$.

Проекции импульса на оси декартовой системы координат:

$$S_x = \int_0^t F_x dt; \quad S_y = \int_0^t F_y dt; \quad S_z = \int_0^t F_z dt;$$

модуль импульса

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}.$$

Направление импульса определяется с помощью углов, образуемых вектором импульса с осями координат:

$$\cos(\hat{\bar{S}} \bar{i}) = \frac{S_x}{S}; \quad \cos(\hat{\bar{S}} \bar{j}) = \frac{S_y}{S}; \quad \cos(\hat{\bar{S}} \bar{k}) = \frac{S_z}{S}.$$

Пример 2.9

Определить результирующий импульс сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 2.11) за промежуток времени $t = 3$ с, если $\vec{F}_1 = 2t$ Н, $\vec{F}_2 = 2$ Н, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 135^\circ$.

Решение

Определим импульс каждой силы за время $t = 3$ с:

$$S_1 = \int_0^3 2t dt = t^2 \Big|_0^3 = 9 \text{ Н}\cdot\text{с};$$

$$S_2 = 2t = 2 \cdot 3 = 6 \text{ Н}\cdot\text{с}.$$

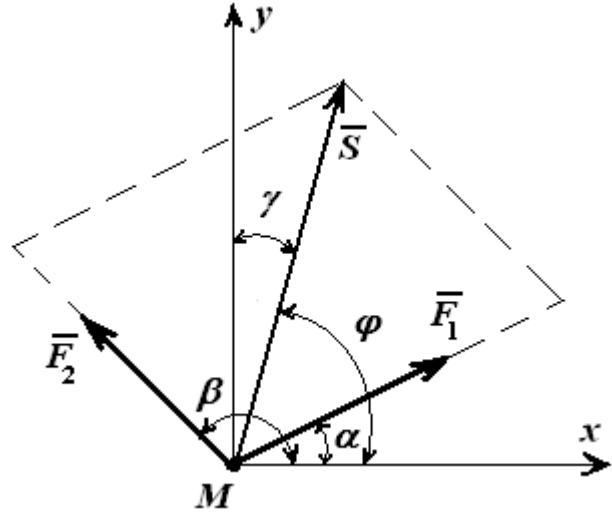


Рис. 2.11

Проекции результирующего импульса на оси координат:

$$S_x = S_1 \cos \alpha - S_2 \cos(180^\circ - \beta) = 9 \cos 30^\circ - 6 \cos 45^\circ = 9 \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 3,54 \text{ Н}\cdot\text{с};$$

$$S_y = S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \beta = 9 \sin 30^\circ + 6 \sin 135^\circ = 9 \frac{1}{2} + 6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 8,73 \text{ Н}\cdot\text{с}.$$

Результирующий импульс

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{3,54^2 + 8,73^2} = 9,43 \text{ Н}\cdot\text{с}.$$

Направление вектора импульса

$$\cos(\hat{\vec{S}} \hat{\vec{i}}) = \cos \varphi = \frac{S_x}{S} = \frac{3,54}{9,43} = 0,375, \quad \varphi = 68^\circ;$$

$$\cos(\hat{\vec{S}} \hat{\vec{j}}) = \cos \gamma = \frac{S_y}{S} = \frac{8,73}{9,43} = 0,926, \quad \gamma = 22^\circ.$$

2.3.4. Теорема об изменении количества движения

Преобразуем основное уравнение динамики:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F};$$

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}; \quad (2.19)$$

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}dt; \quad d(m\bar{v}) = \Delta \bar{S}. \quad (2.20)$$

Если проинтегрировать равенство

$$\int_{v_1}^{v_2} d(m\bar{v}) = \int_0^t \bar{F}dt,$$

то получим

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \bar{S}. \quad (2.21)$$

Выражения (2.19)–(2.21) есть разные формы записи **теоремы об изменении количества движения точки**.

Если учесть, что сумма внутренних сил в механической системе равна нулю, то для механической системы можно получить следующие записи теоремы об изменении количества движения системы:

$$\frac{d(m\bar{v}_C)}{dt} = \bar{F}^e; \quad d\bar{Q} = \Delta \bar{S}^e; \quad \bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \bar{S}^e. \quad (2.22)$$

Следствия из теоремы являются законами сохранения количества движения:

- если импульс действующих сил равен нулю, то количество движения не изменяется;
- если проекция импульса действующих сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось постоянна.

Пример 2.10

Тело **A** массой m_1 и тело **B** массой m_2 покоятся на горизонтальной гладкой плоскости. В некоторый момент времени тело **B** начинает двигаться по телу **A** с относительной скоростью $v_2 = 2kt$ м/с (рис. 2.12).

Найти скорость тела **A** в момент времени t_1 , когда тело **B** пройдет путь s относительно тела **A**.

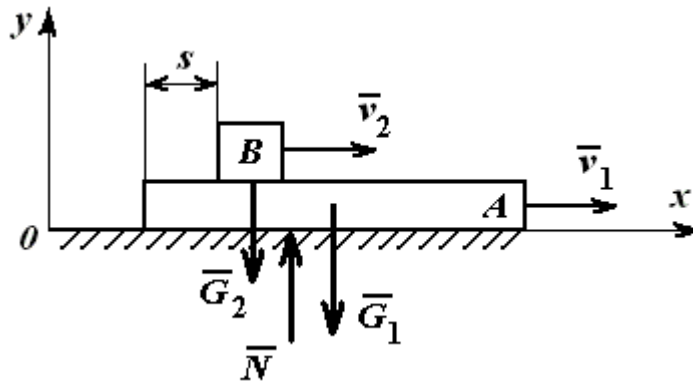


Рис. 2.12

Решение

Пусть v_1 – скорость тела A , тогда абсолютная скорость тела B равна сумме переносной и относительной скоростей: $v_B = v_1 + v_2$. Внешними силами являются силы тяжести G_1 , G_2 и нормальная реакция горизонтальной плоскости N . Проекции сил на горизонтальную ось движения тел равны нулю, поэтому $S_x^e = 0$, и должен выполняться закон сохранения импульса:

$$Q_x - Q_{0x} = 0.$$

В начальный момент времени система находилась в покое, поэтому $Q_{0x} = 0$.

Количество движения системы в момент времени t

$$Q_x = m_1 v_1 + m_2 (v_1 + v_2) = 0, \quad \text{отсюда} \quad v_1 = -\frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2 2kt}{m_1 + m_2},$$

т.е. тело A будет перемещаться в отрицательном направлении по отношению к оси Ox (на рисунке 2.12 – влево).

Поскольку $v_2 = \frac{ds}{dt}$, то

$$s = \int_0^{t_1} v_2 dt = \int_0^{t_1} 2kt dt = kt_1^2; \quad t_1 = \sqrt{\frac{s}{k}}; \quad v_1 = -\frac{2km_2 \sqrt{\frac{s}{k}}}{m_1 + m_2} = -\frac{2m_2 \sqrt{ks}}{m_1 + m_2}.$$

Пример 2.11

Струя воды вытекает со скоростью v из наконечника пожарного рукава с поперечным сечением f (м^2) под углом α к горизонту. Пренебрегая действием силы тяжести на форму струи и считая, что все частицы жидкости растекаются по стене, определить силу давления струи на вертикальную стену (рис. 2.13).

Решение

Для струи жидкости от наконечника пожарного рукава до стены можно записать теорему об изменении количества движения в проекции на ось Ox :

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e.$$

Проекция импульса внешних сил на горизонтальную ось

$$S_x^e = -N \cdot \tau,$$

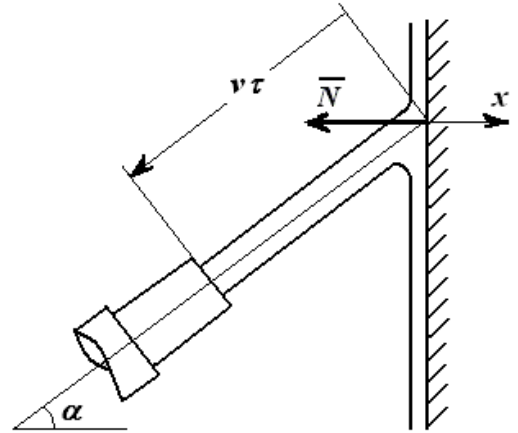


Рис. 2.13

где N – реакция стены – сила, равная по величине и направленная противоположно силе давления струи, спроецированной на ось Ox ;

τ – время движения частиц жидкости от наконечника рукава до стены.

В начальный момент времени $Q_{0x} = mv_x = \rho f v \tau v \cos \alpha = \rho f v^2 \tau \cos \alpha$, где ρ – плотность жидкости.

Проекция количества движения на горизонтальную ось в конечный момент времени $Q_x = 0$, т.к. вся жидкость растекается по вертикальной стене.

Тогда $Q_{0x} = S_x^e$, $\rho f v^2 \tau \cos \alpha = -N \cdot \tau$, отсюда $N = \rho f v^2 \cos \alpha$.

Сила давления струи жидкости противоположна силе реакции стены и максимальна при $\alpha = 0^\circ$.

При решении последней задачи можно использовать **теорему Эйлера для сплошных сред** (интерпретацию теоремы об изменении количества движения):

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_2 + \bar{F}^{об} + \bar{F}^{нов} = 0,$$

т.е. геометрическая сумма главных векторов поверхностных сил $\bar{F}^{нов}$, объемных сил $\bar{F}^{об}$ и векторов секундных количеств движения жидкости, протекающих через замкнутый объем и направленных внутрь объема, равна нулю.

2.3.5. Теорема об изменении момента количества движения (кинетического момента)

В разделе «Статика» курса теоретической механики введено понятие момента силы относительно точки: $\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$ (рис. 2.14, а). Аналогом ему является понятие **момента количества движения** (рисунок 2.14, б):

$$\bar{l}_O = \bar{r} \times m\bar{v}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}. \quad (2.23)$$

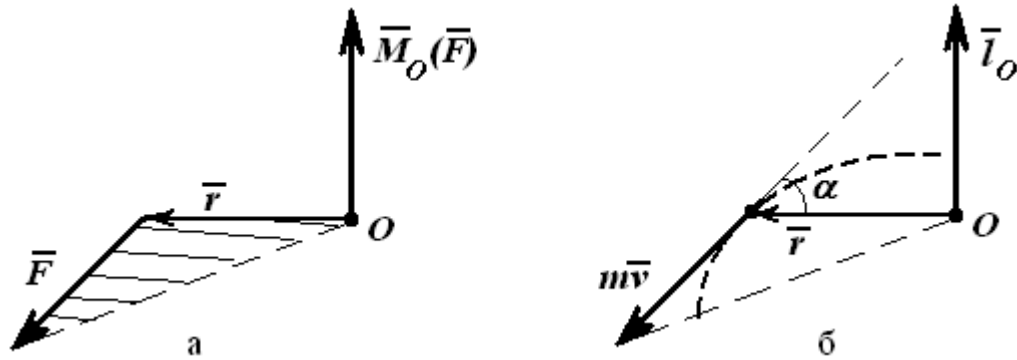


Рис. 2.14

Вектор момента количества движения перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектор количества движения $m\bar{v}$ и радиус-вектор точки $\bar{r}$. Численная величина момента количества движения $l_O = r \cdot mv \sin \alpha$. Его проекции на оси (моменты количества движения относительно координатных осей) определяются, если расписать векторное произведение:

$$\bar{l}_O = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = l_x \bar{i} + l_y \bar{j} + l_z \bar{k}, \quad (2.24)$$

где $l_x = y \cdot mv_z - z \cdot mv_y$;

$$l_y = z \cdot mv_x - x \cdot mv_z;$$

$$l_z = x \cdot mv_y - y \cdot mv_x.$$

Сумма моментов количества движения всех точек, входящих в систему, называется **главным моментом количества движения** (моментом количества движения системы):

$$\bar{L}_O = \sum \bar{l}_{Ok} = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \quad (2.25)$$

Эту величину также называют **кинетическим моментом**.

Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, может быть определен следующим образом. Момент количества движения точки M_k , вращающейся вокруг неподвижной оси,

$$l_k = r_k \cdot m_k v_k = r_k \cdot m_k \omega \cdot r_k,$$

где $v_k = \omega \cdot r_k$ – скорость точки M_k , зависящая от угловой скорости вращения твердого тела ω и кратчайшего расстояния до оси вращения r_k (рис. 2.15).

Суммируя моменты количеств движения всех точек твердого тела, получим выражение для кинетического момента вращающегося твердого тела

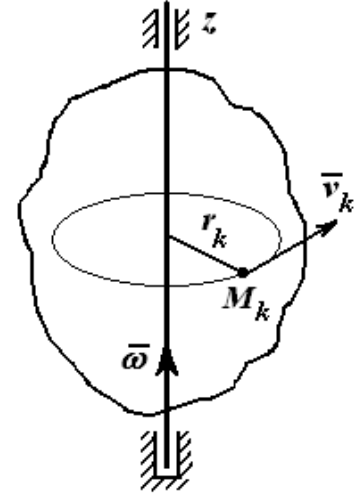


Рис. 2.15

$$L_z = \sum_{k=1}^n l_k = \sum_{k=1}^n r_k m_k \omega \cdot r_k = \omega \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \omega I_z, \quad \text{т.е.} \quad L_z = I_z \omega, \quad (2.26)$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси его вращения.

Возьмем производную по времени от момента количества движения точки:

$$\frac{d\bar{l}_{Ok}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times \bar{F};$$

$$\frac{d\bar{l}_{Ok}}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}). \quad (2.27)$$

Формула (2.27) выражает теорему об изменении момента количества движения точки: производная по времени от момента количества движения точки относительно любого центра равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.

Просуммировав по всем точкам механической системы, получим

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) = \bar{M}_O^e. \quad (2.28)$$

Формула (2.28) выражает теорему об изменении кинетического момента механической системы: производная по времени от кинетического момента системы относительно любого центра равна главному моменту внешних действующих сил относительно того же центра.

Векторное равенство (2.28) может быть спроецировано на выбранные оси координат:

$$\frac{d L_x}{dt} = M_x^e; \quad \frac{d L_y}{dt} = M_y^e; \quad \frac{d L_z}{dt} = M_z^e. \quad (2.29)$$

Следствия из последней теоремы выражают законы сохранения кинетического момента:

1) если главный момент внешних сил относительно какого-либо центра равен нулю ($\bar{M}_O^e = 0$), кинетический момент системы относительно того же центра не изменяется ($\frac{d \bar{L}_O}{dt} = 0$, $\bar{L}_O = \text{const}$);

2) если главный момент внешних сил относительно какой-либо оси равен нулю ($M_z^e = 0$), кинетический момент системы относительно той же оси не изменяется ($\frac{d L_z}{dt} = 0$, $L_z = \text{const}$); например для вращающегося вокруг оси z тела: $I_{z_0} \omega_0 = I_{z_1} \omega_1$, где индексы «0» относятся к начальному моменту времени, индексы «1» – к конечному.

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z , теорема об изменении кинетического момента выглядит следующим образом:

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon = M_z^e \quad \text{или} \quad I_z \ddot{\varphi} = M_z^e. \quad (2.30)$$

Формулы (2.30) есть **дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела**.

Пример 2.12

На барабан A , сплошной однородный цилиндр массой m_1 и радиусом R , намотана невесомая нить (рис. 2.16). К ее свисающему концу прикреплен груз B массой m_2 , который начинает двигаться вниз по закону $x = a + kt^2$. В момент времени t определить кинетический момент системы относительно оси вращения барабана.

Решение

Механическая система состоит из двух тел. Момент количества движения тела A , вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через центр O барабана,

$$L_{A_0} = I_A \omega = \frac{m_1 R^2}{2} \omega.$$

Момент количества движения тела B , движущегося поступательно,

$$L_{B_O} = R \cdot m_2 v_B; \quad v_B = \frac{dx}{dt} = 2kt;$$

$$L_{B_O} = R \cdot m_2 2kt.$$

Так как нить нерастяжима, то $v_B = v_K$, тогда

$$\omega = \frac{v_K}{R} = \frac{v_B}{R} = \frac{2kt}{R}.$$

Кинетический момент системы

$$L_O = L_{A_O} + L_{B_O} = \frac{m_1 R^2}{2} \frac{2kt}{R} + R \cdot m_2 2kt = (m_1 + 2m_2) R k t.$$

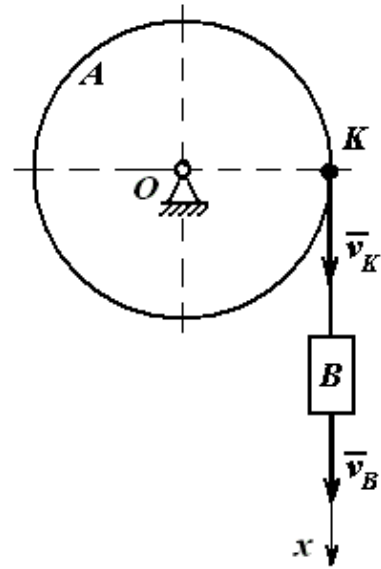


Рис. 2.16

Пример 2.13

Трубка AB длиной l и массой $m_1 = 3m$ (считать однородным стержнем) прикрепена под прямым углом к вертикальной оси $O_1 O_2$ (рис. 2.17). В трубке находится тяжелая точка D массой $m_2 = m$.

В некоторый момент времени под действием момента $M_{вр} = \alpha t$ Н·м трубка начинает вращаться, а точка D двигаться вдоль трубки по закону $s = AD = k l t$, м (α и k – постоянные величины). Определить угловую скорость трубки ω в момент времени $t = 2$ с.

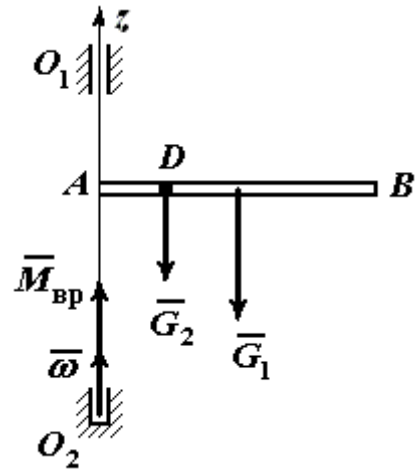


Рис. 2.17

Решение

Эта задача может быть решена с помощью теоремы об изменении кинетического момента:

$$\frac{d L_z}{dt} = M_z^e.$$

Кинетический момент системы L_z определяется как сумма кинетического момента вращающейся вокруг оси z трубки AB и момента количества движения точки D : $L_z = L_{ABz} + L_{Dz}$.

Кинетический момент трубки AB

$$L_{ABz} = I_{AB}\omega,$$

где ω – угловая скорость вращения трубки;

$$I_{AB} – \text{момент инерции трубки, } I_{AB} = \frac{m_1 l^2}{3} = m l^2;$$

$$L_{AB} = m l^2 \omega.$$

Точка D совершает сложное движение: относительное – при движении вдоль трубки, переносное – при вращении вместе с трубкой вокруг оси z . Вектор количества движения точки D от относительной скорости направлен вдоль трубки и пересекает ось z , поэтому момент этого количества движения относительно оси z равен нулю. Момент количества движения точки D от переносной скорости равен

$$L_{Dz} = s \cdot m_2 v_e = s \cdot m_2 (\omega \cdot s) = m_2 s^2 \omega = m \cdot k^2 l^2 t^2 \omega.$$

Кинетический момент всей системы

$$L_z = L_{ABz} + L_{Dz} = m l^2 \omega + m k^2 l^2 t^2 \omega = m \cdot l^2 (1 + k^2 t^2) \omega.$$

На данную механическую систему действуют внешние силы (рис. 2.18): силы тяжести трубки G_1 и точки G_2 , реакции опор X_{O_1} , X_{O_2} , Y_{O_1} , Y_{O_2} , Z_{O_2} и вращающий момент $M_{вр}$.

Внутренние силы системы (силы взаимодействия между трубкой и шариком), силы тяжести, параллельные оси, и реакции опор, пересекающие ось вращения, не создают моментов относительно оси z . В уравнение войдет только вращающий момент $M_{вр}$. Для условий этой задачи получаем

$$\frac{d}{dt} [m \cdot l^2 (1 + k^2 t^2) \omega] = \alpha t.$$

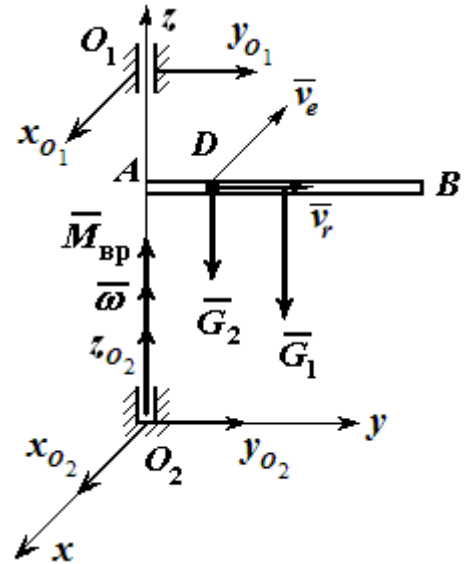


Рис. 2.18

Далее разделяем переменные и интегрируем с учетом начальных условий (при $t = 0$: $\omega_0 = 0$):

$$\frac{d}{dt}(1+k^2t^2)\omega = \frac{\alpha}{m \cdot l^2}t;$$

$$(1+k^2t^2)\frac{d\omega}{dt} + 2\omega \cdot k^2t = \frac{\alpha}{m \cdot l^2}t;$$

$$(1+k^2t^2)\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\alpha}{m \cdot l^2} - 2\omega \cdot k^2 \right) \cdot t;$$

$$\frac{d\omega}{\left(\frac{\alpha}{m \cdot l^2} - 2\omega \cdot k^2 \right)} = \frac{t \cdot dt}{(1+k^2t^2)}; \quad \frac{d\omega \cdot m \cdot l^2 k^2}{(\alpha - 2\omega \cdot m \cdot l^2 k^2)} = \frac{\frac{1}{2}dt^2 \cdot k^2 + 1}{(1+k^2t^2)};$$

$$\frac{d(2\omega \cdot m \cdot l^2 k^2 - \alpha)}{(\alpha - 2\omega \cdot m \cdot l^2 k^2)} = \frac{d(1+k^2t^2)}{(1+k^2t^2)};$$

$$\int_0^{\omega} \frac{d(2\omega \cdot m \cdot l^2 k^2 - \alpha)}{(\alpha - 2\omega \cdot m \cdot l^2 k^2)} = \int_0^t \frac{d(1+k^2t^2)}{(1+k^2t^2)};$$

$$-[\ln(\alpha - 2m \cdot l^2 k^2 \omega) - \ln \alpha] = \ln(1+k^2t^2) - 0;$$

$$\frac{\ln \alpha}{\ln(\alpha - 2m \cdot l^2 k^2 \omega)} = \ln(1+k^2t^2);$$

$$\frac{\alpha}{\alpha - 2m \cdot l^2 k^2 \omega} = 1+k^2t^2;$$

$$\frac{\alpha}{1+k^2t^2} = \alpha - 2m \cdot l^2 k^2 \omega; \quad 2m \cdot l^2 k^2 \omega = \alpha \left(1 - \frac{1}{1+k^2t^2} \right) = \alpha \frac{k^2t^2}{1+k^2t^2};$$

$$\omega = \frac{\alpha}{2m \cdot l^2 k^2} \cdot \frac{k^2t^2}{1+k^2t^2} = \frac{\alpha \cdot t^2}{2m \cdot l^2 (1+k^2t^2)}.$$

При $t = 2$ с

$$\omega = \frac{2\alpha}{m \cdot l^2 (1+k^2t^2)}.$$

Пример 2.14

Однородный диск массой m_1 и радиусом R и точка D массой m_2 , находящаяся на ободе диска, вращаются вокруг вертикальной оси O_1O_2 , перпендикулярной плоскости диска (рис. 2.19, а), с угловой скоростью ω_0 . В некоторый момент времени точка D начинает двигаться по диаметру AB диска по закону $AD = 6Rt^2$. В момент времени $t = 0,5$ с определить угловую скорость диска.

Решение

На рис. 2.19: б – вид сверху для начального положения точки. Внешние силы, действующие на механическую систему, не создают моментов относительно оси O_1O_2 : силы тяжести диска G_1 и точки G_2 параллельны оси O_1O_2 , реакции опор R_{O_1} и R_{O_2} пересекают ось O_1O_2 .

Поэтому в данной задаче имеет место закон сохранения момента количества движения (кинетического момента):

$$\frac{dL_z}{dt} = 0, \quad L_z = \text{const}.$$

В начальный момент времени кинетический момент системы

$$L_{z_0} = L_{\text{диска}_0} + L_{D_0} = I_1 \omega_0 + OA \cdot m_2 OA \cdot \omega_0 =$$

$$= \left(\frac{m_1 R^2}{2} + m_1 R^2 \right) \cdot \omega_0 + m_2 (R\sqrt{2})^2 \omega_0 =$$

$$= \left(\frac{3}{2} m_1 + 2m_2 \right) \cdot R^2 \omega_0.$$

Момент инерции диска I_1 определен с помощью теоремы Штейнера-Гюйгенса (см. формулу (2.8)).

В момент времени $t = 0,5$ с диск повернется на какой-то угол φ , точка D сместится на расстояние $AD = 6 \cdot R \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} R$ (рис. 2.20). Скорость точки определяется суммой переносной $\bar{v}_e$ и относительной $\bar{v}_r$ скоростей:

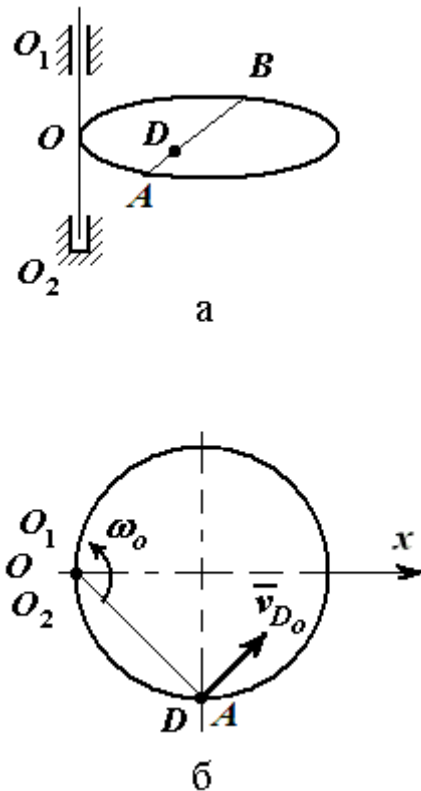


Рис. 2.19

$$v_e = \omega \cdot OD = \omega \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \omega \frac{R\sqrt{5}}{2} \text{ м/с};$$

$$v_r = \frac{d}{dt}(6Rt^2) = 12Rt;$$

при $t = 0,5 \text{ с}$

$$v_r = 6R \text{ м/с}.$$

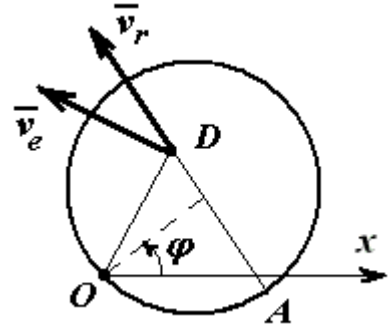


Рис. 2.20

Момент количества движения точки D с учетом переносной и относительной скоростей точки

$$L_D = OD \cdot m_2(OD \cdot \omega) + R \cdot m_2 v_r = m_2 OD^2 \omega + R \cdot m_2 6R = m_2 \left(\frac{5}{4} R^2 \omega + 6R^2 \right).$$

Кинетический момент диска

$$L_{\text{диска}} = I_1 \cdot \omega = \left(m_1 \frac{R^2}{2} + m_1 R^2 \right) \cdot \omega.$$

Кинетический момент всей системы

$$L_z = L_{\text{диска}} + L_D = \frac{3}{2} m_1 R^2 \omega + m_2 R^2 \left(\frac{5}{4} \omega + 6 \right).$$

Из условия $L_{z_0} = L_z$ находим угловую скорость диска:

$$\left(\frac{3}{2} m_1 + 2m_2 \right) R^2 \omega_0 = \frac{3}{2} m_1 R^2 \omega + m_2 R^2 \left(\frac{5}{4} \omega + 6 \right);$$

$$\omega = \frac{\left(\frac{3}{2} m_1 + 2m_2 \right) \cdot \omega_0 - 6m_2}{\frac{3}{2} m_1 + \frac{5}{4} m_2}.$$

2.3.6. Кинетическая энергия точки и системы

Кинетическая энергия – одна из мер механического движения – для точки определяется по формуле

$$T = \frac{mv^2}{2}, \text{ [Дж]}, \quad (2.31)$$

для механической системы

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}, \quad (2.32)$$

где m_k – масса k -й точки системы;
 v_k – скорость k -й точки системы.

Более удобной для расчетов является формула, полученная Иоганном Кенигом (1712-1757):

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \sum \frac{m_k v_{kr}^2}{2}, \quad (2.33)$$

где m – масса всей системы;
 v_C – скорость центра масс системы;
 v_{kr} – относительная скорость k -й точки по отношению к центру масс ($\bar{v}_k = \bar{v}_C + \bar{v}_{kr}$).

Из формулы Кенига можно получить выражения для расчета кинетической энергии твердого тела:

- при поступательном движении тела $\bar{v}_k = \bar{v}_C$, $v_{kr} = 0$,

$$T = \frac{mv_C^2}{2}; \quad (2.34)$$

- при вращении тела вокруг оси, проходящей через его центр масс,

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}, \quad (2.35)$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси z , проходящей в данный момент времени через центр масс;

ω – угловая скорость вращения тела;

- при произвольном движении тела (например, при плоскопараллельном движении)

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_{C\Omega}\omega^2}{2}, \quad (2.36)$$

где $I_{C\Omega}$ – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс.

Пример 2.15

Определить кинетическую энергию однородного стержня (рис. 2.21) массой m и длиной l , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через начало стержня.



Рис. 2.21

Решение

Определяем кинетическую энергию по формуле (2.35):

$$T = \frac{I\omega^2}{2}; \quad I = \frac{ml^2}{3}; \quad T = \frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

Если учесть, что скорость центра масс стержня $v = \omega \cdot \frac{l}{2}$, а момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс $I = \frac{ml^2}{12}$, можно воспользоваться формулой (2.36):

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m \cdot \left(\omega \cdot \frac{l}{2}\right)^2}{2} + \frac{\frac{ml^2}{12} \cdot \omega^2}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{8} + \frac{ml^2\omega^2}{24} = \frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

Пример 2.16

Груз A массой m_1 движется вниз со скоростью v_A и посредством невесомой нити, переброшенной через блок B , заставляет катиться каток D (рис. 2.22). Каток D и блок B – сплошные однородные цилиндры массой m_2 и радиусом R . Определить кинетическую энергию системы.

Решение

Механическая система состоит из трех тел. Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий груза **A**, блока **B** и катка **D**:

$$T = T_A + T_B + T_D.$$

Груз **A** движется поступательно, следовательно, $T_A = \frac{m_1 v_A^2}{2}$.

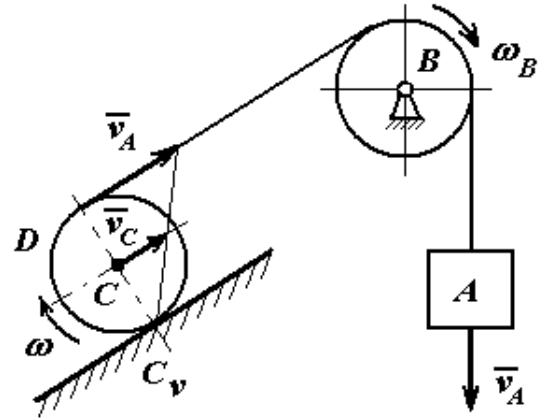


Рис. 2.22

Блок **B** вращается вокруг неподвижной оси:

$$T_B = \frac{I_B \omega_B^2}{2}; \quad I_B = \frac{m_2 R^2}{2}; \quad \omega_B = \frac{v_A}{R};$$

$$T_B = \frac{1}{2} \frac{m_2 R^2}{2} \left(\frac{v_A}{R} \right)^2 = \frac{1}{4} m_2 v_A^2.$$

Каток **D** совершает плоскопараллельное движение:

$$T_D = \frac{m_2 v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2},$$

где v_C – скорость центра масс катка, $v_C = v_A / 2$;

ω – угловая скорость катка, $\omega = \frac{v_A}{2R}$;

I_C – момент инерции катка относительно центра масс, $I_C = \frac{m_2 R^2}{2}$.

$$T_D = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{v_A}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 R^2}{2} \left(\frac{v_A}{2R} \right)^2 = \frac{3}{16} m_2 v_A^2.$$

Полная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{m_2 v_A^2}{4} + \frac{3m_2 v_A^2}{16} = \left(m_1 + \frac{7}{8} m_2 \right) \frac{v_A^2}{2}.$$

2.3.7. Работа силы

Работа силы – величина, характеризующая эффект от действия силы. Элементарная работа

$$\delta A = \bar{F} \cdot \Delta \bar{s}, [\text{Н} \cdot \text{м}]. \quad (2.37)$$

По правилам скалярного произведения можно получить

$$\delta A = F \cdot \delta s \cdot \cos \alpha, \quad (2.38)$$

где α – угол между направлением действия силы и перемещения.

$$\delta A = X \cdot \Delta x + Y \cdot \Delta y + Z \cdot \Delta z, \quad (2.39)$$

где X, Y, Z – проекции силы;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – проекции перемещения точки приложения силы.

Работа постоянной по модулю и направлению силы $\bar{F}$ на прямолинейном перемещении $\bar{s}$ точки ее приложения равна

$$A = \bar{F} \cdot \bar{s} = F \cdot s \cdot \cos(\bar{F}, \bar{s}) = F \cdot s \cdot \cos \alpha. \quad (2.40)$$

Если угол α острый, то работа силы положительна, если тупой – отрицательна. Если направления силы и перемещения совпадают ($\alpha = 0$), то $A = Fs$; если направление силы перпендикулярно направлению перемещения ($\alpha = 90^\circ$), то $A = 0$; если направление силы противоположно направлению перемещения ($\alpha = 180^\circ$), то $A = -Fs$.

В случае переменной силы:

$$A = \int \bar{F} d\bar{s}. \quad (2.41)$$

Для силы, действующей на вращающееся вокруг оси тело:

$$A = \int M_z(\bar{F}) d\varphi. \quad (2.42)$$

Работа равнодействующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении:

$$\delta A = \bar{R} \delta \bar{s} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n) \cdot \delta \bar{s} = \delta A_1 + \delta A_2 + \dots + \delta A_n.$$

Механическая система называется **консервативной**, если на ее точки действуют потенциальные силы, т.е. силы, работа которых не зависит от траектории перемещения точек их приложения. Потенциальная энергия консервативной механической системы в данном положении равна работе действующих потенциальных сил при перемещении системы из этого положения в положение, принимаемое за нулевое:

$$\begin{aligned} A_{10} &= \Pi_1 - \Pi_0 = \Pi_1; & A_{02} &= \Pi_0 - \Pi_2 = -\Pi_2; \\ A_{12} &= \Pi_1 - \Pi_2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Пример 2.17

Тяжелая точка перемещается в системе отсчета **Oxyz** (рис. 2.23). Определить работу силы тяжести при перемещении точки из положения M_1 в положение M_2 .

Решение

Элементарная работа силы тяжести

$$\delta A = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = Z dz = -G dz.$$

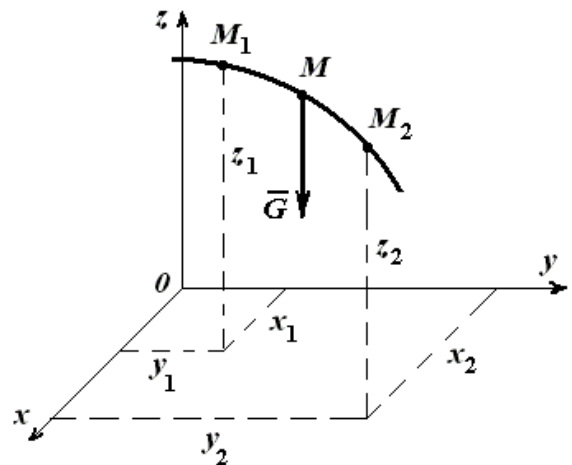


Рис. 2.23

Проекция силы тяжести на оси **Ox** и **Oy** равны нулю. Тогда

$$A_{12} = \int_{z_1}^{z_2} -G dz = G(z_1 - z_2) = Gh,$$

где h – вертикальное перемещение точки.

Пример 2.18

Определить работу силы упругости пружины при перемещении груза из положения x_1 в положение x_2 (рис. 2.24); c – жесткость пружины; l_0 – длина пружины в нерастянутом состоянии.

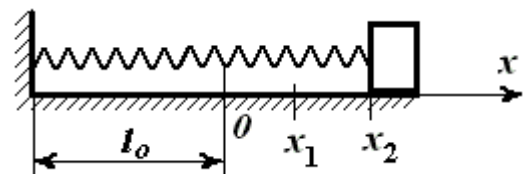


Рис. 2.24

Решение

Начало отсчета по оси x примем в положении O конца нерастянутой пружины. Сила упругости $F_{упр} = -c x$. Работа этой силы

$$\delta A = -c x \cdot \Delta x; \quad A = \int_{x_1}^{x_2} -c x dx = -\frac{cx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2}c(x_2^2 - x_1^2).$$

Пример 2.19

Определить работу момента сопротивления при качении цилиндра вниз по наклонной плоскости (рис. 2.25); m – масса цилиндра, f_k – коэффициент трения качения, α – угол наклона плоскости, s – путь, пройденный осью цилиндра.

Решение

Момент сопротивления качения определяется по формуле

$$M_{сопр} = f_k N,$$

где N – нормальная реакция плоскости;

$$N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha.$$

Тогда $M_{сопр} = f_k mg \cos \alpha$.

При прохождении осью цилиндра пути s сам цилиндр повернется на угол $\varphi = s/R$. Поскольку момент сопротивления качению постоянен и направлен в сторону, противоположную движению цилиндра, то его работа равна

$$A = -M_{сопр} \cdot \varphi = -f_k mg \cos \alpha \frac{s}{R}.$$

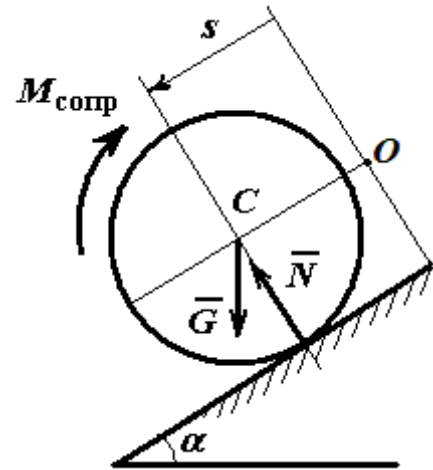


Рис. 2.25

2.3.8. Теорема об изменении кинетической энергии

Второй закон Ньютона можно записать в виде

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}. \quad (2.44)$$

Произведем следующее преобразование $\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt} \frac{d\bar{s}}{d\bar{s}} = \frac{\bar{v} \cdot d\bar{v}}{d\bar{s}}$ и подставим его в формулу (2.44):

$$m \frac{\bar{v} \cdot d\bar{v}}{d\bar{s}} = \bar{F}.$$

Внесем под знак дифференциала скорость и массу: $\frac{d(mv^2)}{2} = \bar{F} \cdot d\bar{s}$ и получим следующие выражения:

$$\frac{d(mv^2)}{2} = \delta A \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \quad (2.45)$$

Формулы (2.45) представляют собой различные формы записи **теоремы об изменении кинетической энергии точки.**

Просуммировав эти выражения по всем точкам системы, получим

$$dT = \delta A^e + \delta A^i, \quad (2.46)$$

т.е. дифференциал от кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действующих на точки системы;

$$T - T_0 = A^e + A^i, \quad (2.47)$$

т.е. изменение кинетической энергии системы равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на точки системы;

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \quad (2.48)$$

т.е. производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на точки системы.

Если механическая система состоит из твердых тел, которые могут быть соединены нерастяжимыми нитями, то работа внутренних сил будет равна ну-

лю, и в правых частях формул (2.46)–(2.48) останется лишь работа внешних сил:

$$T - T_0 = A^e \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dt} = N^e.$$

Для консервативной механической системы, перемещающейся из положения 1 в положение 2, можно записать $T_2 - T_1 = A_{12}$ или $\Pi_1 - \Pi_2 = A_{12}$.

Из последних выражений получим

$$T_2 - T_1 = \Pi_1 - \Pi_2; \quad T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1; \quad T + \Pi = \text{const}.$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий называется полной механической энергией системы. Последняя формула выражает **закон сохранения механической энергии: при движении механической системы в стационарном потенциальном поле сумма ее кинетической и потенциальной энергий остается постоянной.**

Пример 2.20

К блоку A (сплошному однородному цилиндру) массой m_A и радиусом r_A приложен вращающий момент $M_{вр} = \alpha\varphi$ (α – коэффициент пропорциональности, φ – угол поворота), за счет которого с помощью идеального троса поднимается по наклонной плоскости тело B массой m_B , радиусами R_B и r_B , радиусом инерции i ; β – угол наклона плоскости к горизонту, f_k – коэффициент трения качения для тела B .

Определить угловую скорость блока A в момент времени, когда центр O тела B пройдет путь s_0 . В начальный момент система находилась в покое (рис. 2.26).

Решение

Задачи, в которых требуется найти зависимость между скоростью и перемещением, легко решаются с помощью теоремы об изменении кинетической энергии.

Для данной задачи можно записать:

$$T - T_0 = \sum A_k^e;$$

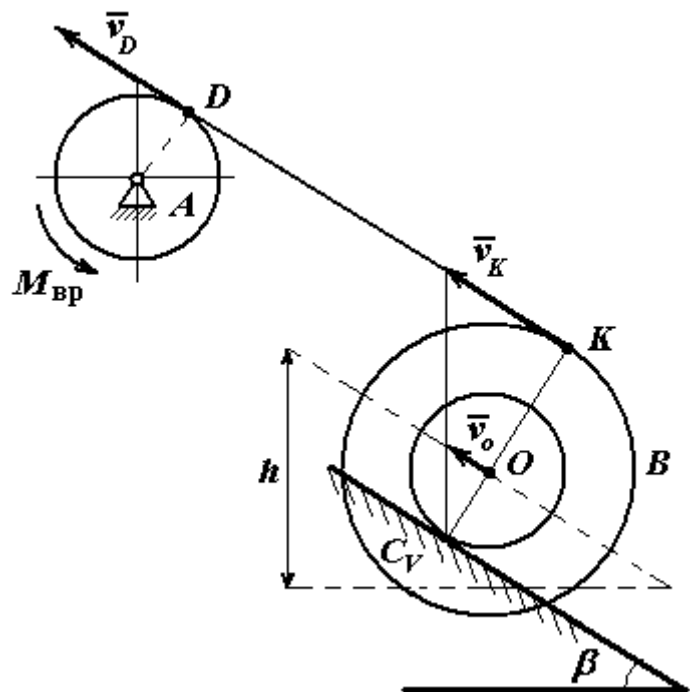


Рис. 2.26

T_0 – кинетическая энергия системы в начальный момент времени, $T_0 = 0$;

$T = T_A + T_B$ – кинетическая энергия системы в конечный момент времени.

Блок **A** вращается вокруг неподвижной оси, его кинетическая энергия вычисляется по формуле (2.35):

$$T_A = \frac{I_A \omega_A^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_A r_A^2}{2} \omega_A^2 = \frac{m_A r_A^2}{4} \omega_A^2.$$

Тело **B** совершает плоскопараллельное движение:

$$T_B = \frac{m_B v_O^2}{2} + \frac{I_B \omega_B^2}{2} = \frac{m_B v_O^2}{2} + \frac{1}{2} m_B i^2 \left(\frac{v_O}{r_B} \right)^2 = \frac{1}{2} m_B v_O^2 \left(1 + \frac{i^2}{r_B^2} \right).$$

Полная кинетическая энергия системы

$$T = T_A + T_B = \frac{1}{2} \frac{m_A r_A^2}{2} \omega_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_O^2 \left(1 + \frac{i^2}{r_B^2} \right).$$

Внешними силами, совершающими работу, являются вращающий момент $M_{\text{вр}}$, сила тяжести тела **B** и момент сопротивления качению тела **B**. Сила тяжести блока **A** работу не совершает, т.к. приложена в неподвижной точке.

Работа переменного вращающего момента

$$A(M_{\text{вр}}) = \int_0^{\varphi_A} \alpha \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \alpha \varphi_A^2.$$

Работа силы тяжести тела **B**

$$A(G_B) = m_B g \cdot s_0 \cos(90^\circ + \beta) = -m_B g \cdot s_0 \sin \beta.$$

Работа момента сопротивления при качении тела **B**

$$A(M_{\text{сопр}}) = -f_k N_B \cdot \varphi_B = -f_k m_B g \cos \beta \cdot \varphi_B.$$

Работа всех внешних сил

$$\sum A_k^e = \frac{1}{2} \alpha \varphi_A^2 - m_B g \cdot s_0 \sin \beta - f_k m_B g \cos \beta \cdot \varphi_B.$$

Определим кинематические зависимости между скоростями и перемещениями точек тел **A** и **B**.

Так как участок троса движется поступательно, то

$$v_D = v_K; \quad v_D = \omega_A \cdot r_A.$$

Для тела **B**, вращающегося вокруг мгновенного центра скоростей C_v , справедливы соотношения:

$$\frac{v_K}{KC_v} = \frac{v_O}{OC_v} = \omega_B; \quad \frac{\omega_A r_A}{R_B + r_B} = \frac{v_O}{r_B} = \omega_B;$$

$$\omega_B = \omega_A \frac{r_A}{R_B + r_B}; \quad v_O = \omega_A \frac{r_A r_B}{R_B + r_B}.$$

Проинтегрировав два последних выражения, получим зависимости для перемещений:

$$\varphi_B = \varphi_A \frac{r_A}{R_B + r_B}; \quad s_O = \varphi_A \frac{r_A r_B}{R_B + r_B}; \quad \varphi_B = \frac{s_O}{r_B}.$$

Если бы в начальный момент времени механическая система находилась в движении, то ее начальная кинетическая энергия T_0 определялась бы по тем же формулам при замене ω_A^2 на $\omega_{A_0}^2$.

Подставим полученные зависимости в выражения для кинетической энергии и работы:

$$T = \frac{m_A r_A^2}{4} \omega_A^2 + \frac{1}{2} m_B \left(\frac{\omega_A r_A r_B}{R_B + r_B} \right)^2 \cdot \left(\frac{r_B^2 + i^2}{r_B^2} \right) = \frac{r_A^2 \omega_A^2}{2} \left(\frac{m_A}{2} + m_B \frac{r_B^2 + i^2}{(R_B + r_B)^2} \right).$$

$$\sum A_k^e = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{s_O (R_B + r_B)}{r_A \cdot r_B} \right)^2 - m_B g \cdot s_O \sin \beta - f_k m_B g \cos \beta \cdot \frac{s_O}{r_B} =$$

$$= \frac{s_O^2}{2} \frac{\alpha (R_B + r_B)^2}{r_A^2 \cdot r_B^2} - s_O \cdot m_B g \left(\sin \beta + \frac{f_k}{r_B} \cos \beta \right).$$

Приравниваем значения кинетической энергии и работы:

$$\frac{r_A^2 \omega_A^2}{2} \left(\frac{m_A}{2} + m_B \frac{r_B^2 + i^2}{(R_B + r_B)^2} \right) - 0 = \frac{s_O^2}{2} \frac{\alpha (R_B + r_B)^2}{r_A^2 \cdot r_B^2} - s_O \cdot m_B g \left(\sin \beta + \frac{f_k}{r_B} \cos \beta \right).$$

Из последнего выражения находим зависимость угловой скорости блока **A** от перемещения оси **O** тела **B**:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{s_O^2 \frac{\alpha (R_B + r_B)^2}{r_A^2 \cdot r_B^2} - 2s_O \cdot m_B g \left(\sin \beta + \frac{f_k}{r_B} \cos \beta \right)}{r_A^2 \left(\frac{m_A}{2} + m_B \frac{r_B^2 + i^2}{(R_B + r_B)^2} \right)}}.$$

Пример 2.21

Груз 1 массой m_1 прикреплен к концу невесомой нерастяжимой нити, второй конец которой намотан на блок 2 массой m_2 и радиусом r_2 . С блоком 2 жестко скреплен рычаг 3 массой m_3 , на конце которого шарнирно закреплено колесо 4 массой m_4 и радиусом r_4 . При вращении колеса 2 вместе с рычагом 3 колесо 4 катится по внутренней поверхности неподвижного колеса 5 радиусом R . Система расположена в вертикальной плоскости. Все колеса – однородные диски, рычаг – однородный стержень, который в начальный момент времени неподвижен и занимает горизонтальное положение (рис. 2.27).

Определить скорость груза 1 в тот момент, когда рычаг 3 повернется на угол φ_3 .

Решение

Применяем теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e,$$

T_0 – кинетическая энергия системы в начальный момент времени, $T_0 = 0$;

$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ – кинетическая энергия системы в конечный момент времени;

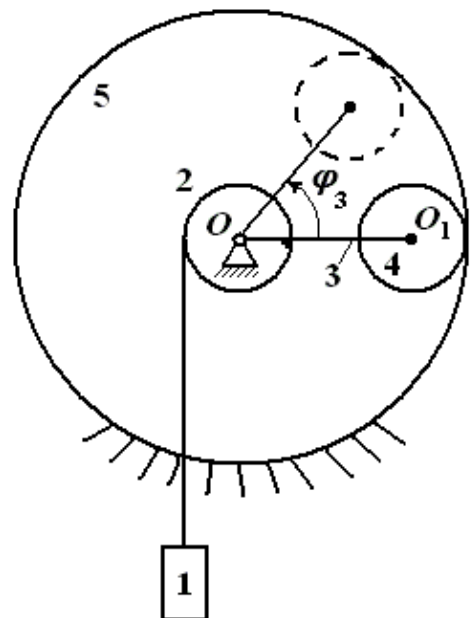


Рис. 2.27

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \text{ т.к. груз 1 движется поступательно;}$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2}, \text{ т.к. блок 2 вращается вокруг неподвижной оси;}$$

$$T_3 = \frac{I_3 \omega_3^2}{2} - \text{рычаг 3 вращается вокруг неподвижной оси вместе с колесом 2,}$$

$$\omega_3 = \omega_2;$$

$$T_4 = \frac{m_4 v_{O_1}^2}{2} + \frac{I_4 \omega_4^2}{2} - \text{колесо 4 совершает плоскопараллельное движение.}$$

Выразим линейные и угловые скорости точек и тел механической системы через скорость v_1 груза 1:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}; \quad \omega_2 = \omega_3; \quad v_{O_1} = \omega_3 \cdot OO_1 = \omega_2 (R - r_4) = \frac{v_1}{r_2} (R - r_4);$$

$$\omega_4 = \frac{v_{O_1}}{r_4} = \frac{v_1 (R - r_4)}{r_2 \cdot r_4}.$$

Запишем кинетическую энергию тел в зависимости от скорости v_1 :

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}; \quad T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_2 r_2^2}{2} \left(\frac{v_1}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{4} m_2 v_1^2;$$

$$T_3 = \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m_3 (OO_1)^2}{3} \omega_3 = \frac{1}{6} m_3 (R - r_4)^2 \frac{v_1^2}{r_2^2};$$

$$T_4 = \frac{m_4 v_{O_1}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_4 r_4^2}{2} \frac{v_{O_1}^2}{r_4^2} = \frac{3}{4} m_4 v_{O_1}^2 = \frac{3}{4} m_4 (R - r_4)^2 \frac{v_1^2}{r_2^2}.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_1^2}{4} + \frac{1}{6} m_3 (R - r_4)^2 \frac{v_1^2}{r_2^2} + \frac{3}{4} m_4 (R - r_4)^2 \frac{v_1^2}{r_2^2} =$$

$$= \frac{v_1^2}{2} \left[m_1 + \frac{m_2}{2} + \left(\frac{1}{3} m_3 + \frac{3}{2} m_4 \right) \frac{(R - r_4)^2}{r_2^2} \right].$$

Работа внешних сил системы складывается из работ сил тяжести тел:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Груз 1 опустился на высоту h_1 , следовательно, $A_1 = m_1 g \cdot h_1$.

Сила тяжести колеса 2 приложена к неподвижной точке, поэтому $A_2 = 0$.

Работа силы тяжести рычага 3: $A_3 = -m_3 g \cdot h_3 = -m_3 g \frac{OO_1}{2} \sin \varphi_3$.

Работа силы тяжести колеса 4: $A_4 = -m_4 g \cdot h_4 = -m_4 g \cdot OO_1 \sin \varphi_3$.

Определим зависимости между перемещениями точек и тел системы. Проинтегрировав кинематические зависимости для линейных и угловых скоростей, получим:

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \frac{h_1}{r_2}; \quad h_1 = \varphi_2 r_2 = \varphi_3 r_2; \quad h_3 = \frac{OO_1}{2} \sin \varphi_3; \quad h_4 = OO_1 \cdot \sin \varphi_3.$$

Подставляем эти выражения в формулы для определения работ:

$$\begin{aligned} A &= m_1 g \cdot h_1 + 0 - m_3 g \cdot \frac{OO_1}{2} \sin \varphi_3 - m_4 g \cdot OO_1 \sin \varphi_3 = \\ &= m_1 g \cdot r_2 \cdot \varphi_3 - \frac{1}{2} m_3 g (R - r_4) \sin \varphi_3 - m_4 g (R - r_4) \sin \varphi_3. \end{aligned}$$

Найденные выражения для кинетической энергии системы и работы действующих сил подставим в формулу теоремы об изменении кинетической энергии:

$$\frac{v_1^2}{2} \left[m_1 + \frac{m_2}{2} + \left(\frac{m_3}{3} + \frac{3m_4}{2} \right) \frac{(R - r_4)^2}{r_2^2} \right] - 0 = m_1 g \cdot r_2 \varphi_3 - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) g (R - r_4) \sin \varphi_3.$$

Из последней формулы определим скорость груза 1

$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_1 g \cdot r_3 \cdot \varphi_3 - 2g \left(\frac{m_3}{2} + m_4 \right) (R - r_4) \sin \varphi_3}{m_1 + \frac{m_2}{2} + \left(\frac{m_3}{3} + \frac{3m_4}{2} \right) \frac{(R - r_4)^2}{r_2^2}}}$$

2.4. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

Закон плоскопараллельного движения в кинематике имеет вид:

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t); \\ y_A &= y_A(t); \\ \varphi &= \varphi(t), \end{aligned} \quad (2.49)$$

где точка A – выбранный полюс.

В динамике за полюс обычно принимается центр масс, поэтому первые два уравнения можно записать, используя теорему о движении центра масс (формула (2.13)):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= R_x^e; \\ m\ddot{y}_C &= R_y^e. \end{aligned}$$

Для получения третьего уравнения используется теорема об изменении кинетического момента твердого тела (формула (2.29)); при этом подвижная ось z должна пройти через центр масс: $I_z \ddot{\varphi} = M_z^e$.

Получим дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= R_x^e; \\ m \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= R_y^e; \\ I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= M_z^e. \end{aligned} \quad (2.50)$$

После интегрирования выражений (2.50) можно получить кинематические соотношения (2.49).

Пример 2.22

На вал однородного катка массой m и радиусом R намотана нить, к концу которой приложена сила $\vec{P}$ под углом α к горизонту (рис. 2.28). Радиус вала r , радиус инерции катка i . Поверхность шероховатая, каток движется без проскальзывания. Определить закон движения оси O катка, если в начальный момент времени он находился в покое.

Решение

Каток движется в системе отсчета O_1xy , т.е. совершает плоское движение. На механическую систему, кроме заданной силы $\vec{P}$ и силы тяжести катка $\vec{G}$, действуют силы сцепления с поверхностью $\vec{F}_{\text{сц}}$ и реакция этой поверхности $\vec{N}$. В предположении, что вращение катка происходит по ходу часовой стрелки, сила сцепления направлена в отрицательном направлении оси O_1x .

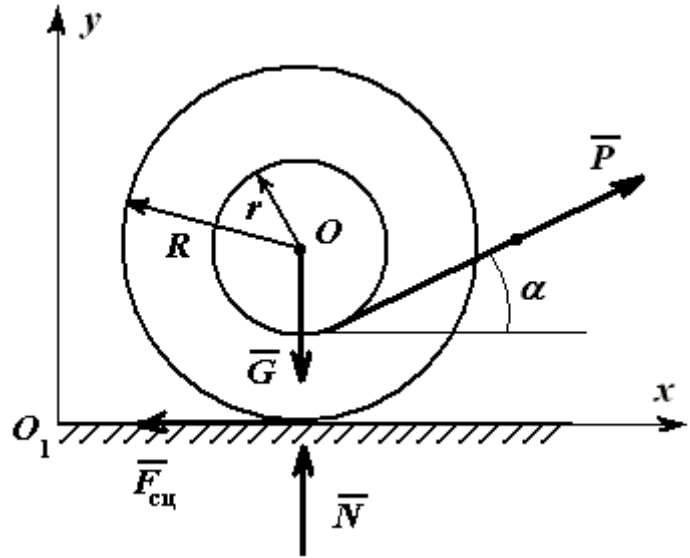


Рис. 2.28

По формулам (2.50) составим дифференциальные уравнения плоского движения:

$$m\ddot{x}_O = P \cos \alpha - F_{\text{сц}};$$

$$m\ddot{y}_O = -G + N + P \sin \alpha;$$

$$I_z \ddot{\phi} = F_{\text{сц}} \cdot R - P \cdot r.$$

Движение по оси O_1y отсутствует, $y_O = \text{const}$, тогда

$$-G + N + P \sin \alpha = 0.$$

Так как проскальзывание отсутствует, то ускорение точки O катка можно выразить через его угловое ускорение:

$$a_O = \varepsilon \cdot R \quad \text{или} \quad \ddot{x} = \ddot{x}_O = \ddot{\phi} \cdot R.$$

Из первого и третьего уравнений определяем ускорение точки O :

$$m\ddot{x} = P \cos \alpha - F_{cu}; \quad m \cdot i^2 \frac{1}{R} \ddot{x} = F_{cu} \cdot R - P \cdot r;$$

$$F_{cu} = P \cos \alpha - m\ddot{x}; \quad m \cdot i^2 \ddot{x} = (P \cos \alpha - m\ddot{x})R^2 - P \cdot R \cdot r;$$

$$m \cdot i^2 \ddot{x} + mR^2 \ddot{x} = P \cdot R^2 \cos \alpha - P \cdot R \cdot r;$$

$$\ddot{x}(R^2 + i^2)m = P \cdot R(R \cos \alpha - r); \quad \ddot{x} = \frac{P}{m} \frac{R(R \cos \alpha - r)}{R^2 + i^2}.$$

Правая часть последнего уравнения – постоянная величина. После интегрирования этого выражения с учетом начальных условий ($t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$) получим

$$x_0 = \frac{P}{m} \frac{R(R \cos \alpha - r)}{2(R^2 + i^2)} t^2.$$

3. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

3.1. Принцип Даламбера

Принципом Даламбера (принципом Германа-Эйлера-Даламбера или методом кинетостатики) называется метод решения задач, при котором уравнениям движения в динамике придается вид уравнений статики. Для несвободной материальной точки можно записать

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R},$$

где $\bar{F}$ – результирующая действующих активных сил;
 $\bar{R}$ – результирующая реакций связей.

Этому уравнению можно придать другой вид:

$$\bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}) = 0 \quad \text{или} \quad \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0, \quad (3.1)$$

где $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$ – сила инерции,

т.е. для движущейся точки геометрическая сумма действующих сил, реакций связи и силы инерции равна нулю.

Обобщим этот принцип для системы материальных точек. В статике для равновесия твердого тела выводятся два условия: равенство нулю главного вектора и главного момента системы сил. По аналогии для механической системы можно записать

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{R}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0,$$

$$\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0,$$

$$\bar{F}^e + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0, \quad (3.2)$$

$$\bar{M}_O^e + \bar{M}_O^R + \bar{M}_O^\Phi = 0, \quad (3.3)$$

где $\bar{F}^e, \bar{R}, \bar{\Phi}$ – главные векторы соответственно внешних сил, реакций связей и сил инерции;

$\bar{M}_O^e, \bar{M}_O^R, \bar{M}_O^\Phi$ – главные моменты соответственно внешних сил, реакций связей и сил инерции относительно центра O ,

т.е. в любой момент времени геометрическая сумма главных векторов внешних сил, реакций связей, сил инерции и геометрическая сумма главных моментов внешних сил, реакций связей и сил инерции равна нулю.

В статике показано, что любую систему сил и моментов сил можно привести к заданному центру, используя принцип Пуансо [8]. Чаще всего в расчетах силы приводятся к центру масс.

Главный вектор сил инерции для всех случаев движения

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}_C. \quad (3.4)$$

Главный момент сил инерции точек твердого тела:

$$\begin{aligned} & \text{- при поступательном движении } \bar{M}_{zO}^{\Phi} = 0; \\ & \text{- при вращательном движении тела } \bar{M}_{zO}^{\Phi} = -I_z \bar{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Сравнивая уравнения (3.2) и (3.3) с уравнениями равновесия для произвольной пространственной системы сил в статике, можно убедиться, что первое уравнение идентично равенству нулю главного вектора всех сил, а второе – равенству нулю главного момента всех сил. То есть принцип Даламбера – это прием, позволяющий уравнения динамики писать в форме уравнений статики.

Пример 3.1

Груз **A** массой m_1 , опускаясь вниз по наклонной плоскости призмы **D**, приводит в движение посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок **C**, груз **B** массой m_2 . Угол наклона плоскости – α ; масса блока **C** – m_3 ; масса призмы **D** – m_4 . Определить давление призмы **D** на горизонтальную плоскость и уступ **E**.

Решение

Для данной механической системы может быть применен принцип Даламбера. На рис. 3.1 показаны: внешние силы, действующие на систему (силы тяжести тел $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4$), реакции связей $\bar{N}_1, \bar{N}_2$, силы инерции $\bar{\Phi}_A, \bar{\Phi}_B$ и момент инерциальных сил M_O^{Φ} .

Призма **D** неподвижна, силы $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ равны по величине и противоположны по направлениям искомым силам давления призмы **D** на уступ **E** и горизонтальную плоскость.

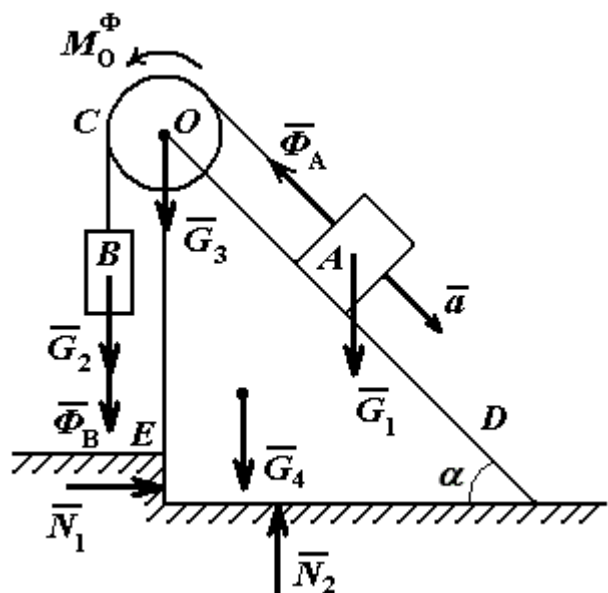


Рис. 3.1

Напишем уравнения принципа Даламбера в проекции на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} N_1 - \Phi_A \cos \alpha = 0, \\ -G_1 - G_2 - G_3 - G_4 + N_2 + \Phi_A \sin \alpha - \Phi_B = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Отсюда $N_1 = \Phi_A \cos \alpha$, $N_2 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 - \Phi_A \sin \alpha + \Phi_B$.

Силы инерции для грузов A и B : $\Phi_A = m_1 a$, $\Phi_B = m_2 a$.

Для определения ускорения a груза A напишем уравнения принципа Даламбера отдельно для каждого из тел A , B и C (рис. 3.2). Натяжения нитей T_A и T_B , как и силы давления между телами, входящими в данную систему (N_A, x_O, y_O) , были внутренними силами и в уравнениях не учитывались. Как только мы выделили тела из системы, эти силы стали внешними.

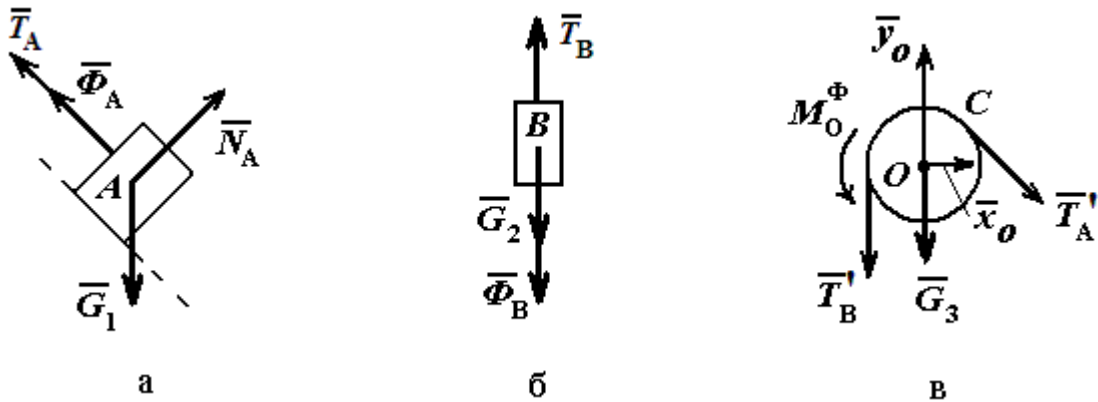


Рис. 3.2

Для тела A (рис. 3.2, а) напишем уравнение в проекции на ось, проходящую параллельно наклонной плоскости призмы:

$$G_1 \sin \alpha - T_A - \Phi_A = 0.$$

Для тела B (рис. 3.2, б) – в проекции на вертикальную ось:

$$T_B - G_2 - \Phi_B = 0.$$

Для тела C (рис. 3.2, в), чтобы не вводить в рассмотрение реакции опоры $\bar{x}_O, \bar{y}_O$, напишем уравнение моментов всех сил относительно оси O :

$$T'_A \cdot R - T'_B \cdot R - M_O^\Phi = 0.$$

Решим совместно последние три уравнения с учетом того, что $T'_A = T_A$ и $T'_B = T_B$:

$$G_1 \sin \alpha - T_A - m_1 a = 0; \quad T_B - G_2 - m_2 a = 0; \quad T_A \cdot R - T_B \cdot R - I_C \varepsilon_C = 0;$$

$$I_C = \frac{m_3 R^2}{2}; \quad \varepsilon_C = \frac{a}{R};$$

$$T_A \cdot R - T_B \cdot R - \frac{m_3 R^2}{2} \cdot \frac{a}{R} = 0; \quad T_A - T_B - \frac{m_3 a}{2} = 0; \quad T_B = T_A - \frac{m_3 a}{2};$$

$$m_1 g \sin \alpha - T_A - m_1 a = 0; \quad T_A - \frac{m_3 a}{2} - m_2 g - m_2 a = 0;$$

$$T_A = \frac{m_3 a}{2} + m_2 g + m_2 a;$$

$$m_1 g \sin \alpha - \frac{m_3 a}{2} - m_2 g - m_2 a - m_1 a = 0;$$

$$a = \frac{g \cdot (m_1 \sin \alpha - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}}.$$

Подставив полученное значение ускорения в формулы (*), определим величины N_1 и N_2 :

$$N_1 = \Phi_A \cos \alpha = m_1 a \cos \alpha = \frac{m_1 g \cdot (m_1 \sin \alpha - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} \cos \alpha;$$

$$\begin{aligned} N_2 &= G_1 + G_2 + G_3 + G_4 - \Phi_A \sin \alpha + \Phi_B = \\ &= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot g - (m_1 \sin \alpha - m_2) \cdot a; \end{aligned}$$

$$N_2 = g \cdot \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 - \frac{(m_1 \sin \alpha - m_2)^2}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} \right).$$

Пример 3.2

К невесомой оси, вращающейся в опорах **A** (подпятник) и **B** (подшипник), прикреплены два стержня (рис. 3.3). Невесомый стержень **HD** длиной l_1 параллелен оси **Ax**; на его конце закреплен точечный груз **D** массой m_1 . В плоскости **yAz** под углом α к оси закреплен однородный стержень **KL** длиной l_2 и массой m_2 . Расстояния между опорами и точками крепления стержней: $AK = h_1$, $KH = h_2$, $HB = h_3$.

Вся система вращается вокруг оси **Az** с постоянной угловой скоростью ω . Определить реакции опор **A** и **B**.

Решение

Для решения задачи с помощью принципа Даламбера покажем все действующие силы.

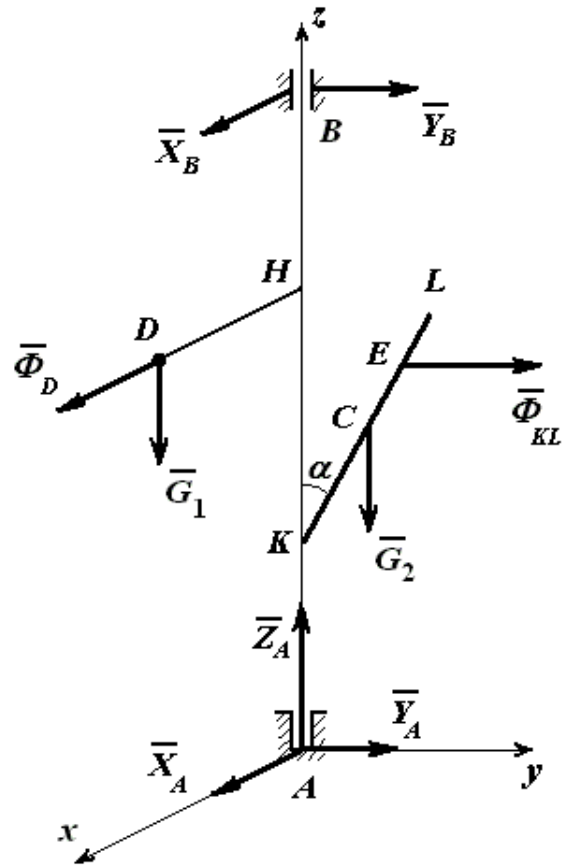


Рис. 3.3

Сила тяжести G_1 груза приложена в точке **D**. Сила тяжести G_2 стержня **KL** приложена в его середине. Реакция подпятника имеет три составляющие: X_A , Y_A , Z_A ; реакция подшипника – две составляющие: X_B , Y_B .

Сила инерции груза приложена в точке **D**, по модулю равна произведению массы груза на его нормальное ускорение и направлена противоположно этому ускорению:

$$\Phi_D = m_1 a_D = m_1 \omega^2 l_1.$$

Сила инерции однородного стержня приложена в точке **E** и равна

$$\Phi_{KL} = m_2 a_C = m_2 \omega^2 \frac{KL}{2} \sin \alpha = m_2 \omega^2 \frac{l_2}{2} \sin \alpha.$$

Силу инерции Φ_{KL} можно вычислить иначе. Отрезок **KL** разбиваем на множество малых отрезков длиной Δs (рис. 3.4); сила инерции отрезка, отстоящего от точки **K** на расстоянии s равна

$$\Delta \Phi = \Delta m \cdot \omega^2 s \cdot \sin \alpha,$$

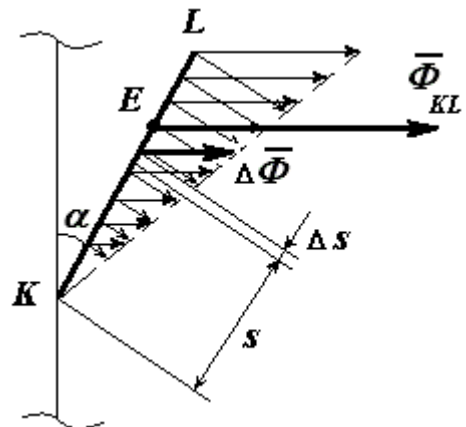


Рис. 3.4

где Δm – масса отрезка;

$$\Delta m = \rho \cdot f \cdot \Delta s;$$

ρ – плотность материала стержня;

f – площадь поперечного сечения стержня.

Полную силу инерции получим, просуммировав силы инерции всех отрезков:

$$\Phi = \sum \Delta \Phi = \sum \rho \cdot f \cdot \Delta s \cdot \omega^2 \cdot s \cdot \sin \alpha;$$

$$\Phi = \int_0^{l_2} \rho \cdot f \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha \cdot s \, ds = \frac{1}{2} \rho f \omega^2 \sin \alpha \cdot l_2^2; \quad \rho \cdot f \cdot l_2 = m_2;$$

$$\Phi = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha.$$

Эпюра элементарных сил инерции представляет собой треугольник. Чем ближе отрезок к оси вращения, тем меньше его ускорение и, следовательно, сила инерции. Равнодействующая Φ_{KL} элементарных сил инерции приложена в центре тяжести треугольника (в точке E) на расстоянии, равном $\frac{2}{3} l_2$ от вершины треугольника: $KE = \frac{2}{3} KL = \frac{2}{3} l_2$.

В соответствии с принципом Даламбера составляем уравнения равновесия (по аналогии с уравнениями равновесия произвольной пространственной системы сил в статике):

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B + \Phi_D = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + \Phi_{KL} = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A - G_1 - G_2 = 0;$$

$$\sum M_{kx} = 0, \quad -Y_B \cdot AB - \Phi_{KL} (AK + KE \cos \alpha) - G_2 KC \sin \alpha = 0;$$

$$\sum M_{ky} = 0, \quad X_B \cdot AB + \Phi_D \cdot AH + G_1 \cdot DH = 0;$$

$\sum M_{kz} = 0$, поскольку все силы либо параллельны, либо пересекают ось Az и не создают моментов относительно оси; поэтому и вращение происходит с постоянной угловой скоростью.

Подставляем в эти уравнения исходные данные и величины сил инерции:

$$X_A + X_B + m_1 \omega^2 l_1 = 0;$$

$$Y_A + Y_B + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha = 0;$$

$$Z_A - m_1 g - m_2 g = 0;$$

$$-Y_B (h_1 + h_2 + h_3) - \frac{1}{2} m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha (h_1 + \frac{2}{3} l_2 \cos \alpha) - m_2 g \frac{1}{2} l_2 \sin \alpha = 0;$$

$$X_B (h_1 + h_2 + h_3) + m_1 \omega^2 l_1 (h_1 + h_2) + m_1 g \cdot l_1 = 0.$$

Из этих выражений определяем составляющие реакций опор **A** и **B**:

$$X_A = \frac{m_1 \omega^2 l_1 (h_1 + h_2) + m_1 g \cdot l_1}{(h_1 + h_2 + h_3)} - m_1 \omega^2 l_1;$$

$$Y_A = \frac{m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha (h_1 + \frac{2}{3} l_2 \cos \alpha) - m_2 g \cdot l_2 \sin \alpha}{2(h_1 + h_2 + h_3)} - \frac{1}{2} m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha = 0;$$

$$Z_A = m_1 g + m_2 g;$$

$$X_B = -\frac{m_1 \omega^2 l_1 (h_1 + h_2) + m_1 g \cdot l_1}{(h_1 + h_2 + h_3)};$$

$$Y_B = -\frac{m_2 \omega^2 l_2 \sin \alpha (h_1 + \frac{2}{3} l_2 \cos \alpha) - m_2 g \cdot l_2 \sin \alpha}{2(h_1 + h_2 + h_3)}.$$

3.2. Возможные перемещения, идеальные связи

Возможными (виртуальными) перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые, бесконечно малые перемещения точек системы, допускаемые наложенными на систему связями. В силу малости этих величин криволинейные перемещения точек заменяются прямолинейными отрезками, откладываемыми в направлении касательной к траектории каждой точки (или ее скорости). Величина перемещения определяется как при действительном перемещении.

Например, для кривошипа OA (рис. 3.5) возможным перемещением является бесконечно малый угол $\delta\varphi$. Для точки A возможным перемещением δs_A является отрезок AA' , перпендикулярный OA (по этой же линии будет направлена скорость точки A при вращении кривошипа); величина возможного перемещения рассчитывается как длина дуги AA'' (действительного перемещения точки A):

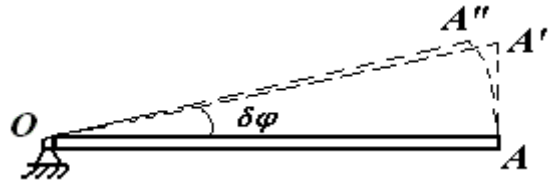


Рис. 3.5

$$\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi.$$

Идеальные связи – это связи, работа реакций которых на возможном перемещении равна нулю. Например, идеальной связью является гладкая поверхность (рис. 3.6, а), поскольку работа реакции N на возможном перемещении равна нулю:

$$\delta A = N \cdot \delta s \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

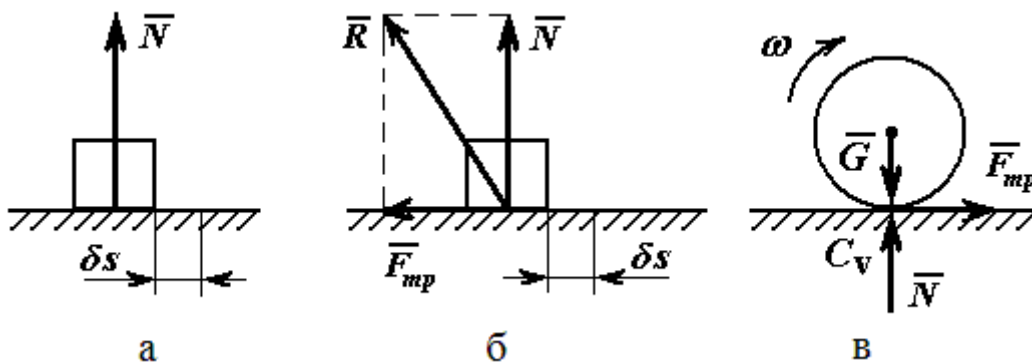


Рис. 3.6

При отсутствии трения в шарнире (рис. 3.5) связь в точке O является идеальной, поскольку работа момента трения равна нулю:

$$\delta A = M_{mp} \cdot \delta\varphi = 0 \cdot \delta\varphi = 0.$$

Связь можно сделать идеальной, если, например, силу трения перевести в разряд внешних сил (рис. 3.6, б). Подобным образом любые связи становятся идеальными. Идеальной связью для катящегося без проскальзывания твердого тела является шероховатая поверхность (рис. 3.6, в), если момент сопротивления от трения качения перевести в разряд внешних моментов. Реакция N и сила трения $F_{тр}$ приложены в точке, которая является мгновенным центром скоростей; ее скорость равна нулю, значит, и возможное перемещение также равно нулю:

$$\delta A = N \cdot 0 + F_{тр} \cdot 0 = 0.$$

3.3. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений устанавливает условие равновесия механической системы с идеальными связями.

Необходимым и достаточным условием равновесия механической системы с удерживающими, стационарными и идеальными связями является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы на их возможных перемещениях:

$$\sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos \alpha_k = 0; \quad (3.6)$$

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0; \quad (3.7)$$

$$\sum \bar{F}_k \cdot \bar{v}_k = 0. \quad (3.8)$$

Формулы (3.6)–(3.8) представляют собой различные формы записи принципа возможных перемещений. Формула (3.8) получена делением левой и правой частей предыдущего равенства на малый промежуток времени τ ($\bar{v}_k = \frac{\delta \bar{r}_k}{\tau}$) и выражает принцип возможных перемещений через мощности действующих сил.

Пример 3.3

Для заданного положения механизма, расположенного в горизонтальной плоскости (рис. 3.7), определить величину момента M , уравнивающего силу $P = 100$ Н, если $OA = 0,2$ м, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$.

Решение

Рассматриваемый механизм находится в равновесии под действием силы $\bar{P}$ и момента M . Силами сопротивления в шарнирах пренебрегаем, поскольку связи являются идеальными.

Зададим системе возможные перемещения. На основании принципа возможных перемещений можно записать:

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0 \quad \text{или} \quad M \cdot \delta \varphi + P \cdot \delta s_B \cdot \cos 180^\circ = 0, \quad (*)$$

где $\delta \varphi$ – возможное перемещение кривошипа OA ;

δs_B – возможное перемещение точки B .

Найдем зависимость между перемещением кривошипа OA и перемещением точки B . При повороте кривошипа на угол $\delta \varphi$ точка A получит возможное перемещение $\delta s_A = AA' = OA \cdot \delta \varphi$.

Точки A и B принадлежат шатуну AB , который совершая плоское движение в данный момент времени, может вращаться вокруг мгновенного центра скоростей C_V и при перемещении точки A поворачивается на угол $\delta \varphi_{AB}$:

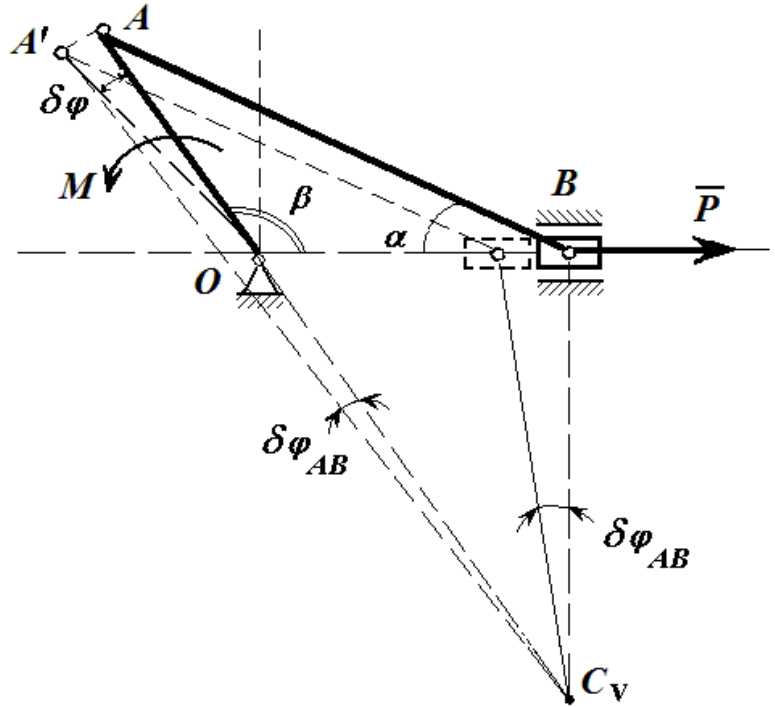


Рис. 3.7

$$\delta \varphi_{AB} = \frac{\delta s_A}{AC_V} = \frac{\delta s_B}{BC_V}.$$

Перемещение точки B : $\delta s_B = BC_V \cdot \delta \varphi_{AB} = \delta s_A \frac{BC_V}{AC_V}.$

Из треугольника ABC_V :

$$AB = 2 \cdot OA \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,346 \text{ м};$$

$$BC_V = AB = 0,346 \text{ м}; \quad AC_V = 2 \cdot AB \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,346 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,6 \text{ м}.$$

Тогда

$$\delta s_B = \delta s_A \cdot \frac{BC_V}{AC_V} = OA \cdot \delta \varphi \cdot \frac{BC_V}{AC_V} = \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,346} \cdot \delta \varphi = 0,347 \delta \varphi \text{ м}.$$

Подставляя значение δs_B в уравнение (*), находим зависимость между силой P и моментом M и величину момента:

$$M \cdot \delta\varphi + P \cdot 0,347 \cdot \delta\varphi \cdot (-1) = 0, \quad M = 0,347 \cdot P = 34,7 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Пример 3.4

Определить реакции опор составной конструкции с помощью принципа возможных перемещений. Задано: $P = 6 \text{ кН}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $\alpha = 60^\circ$, размеры (в метрах) указаны на рис. 3.8.

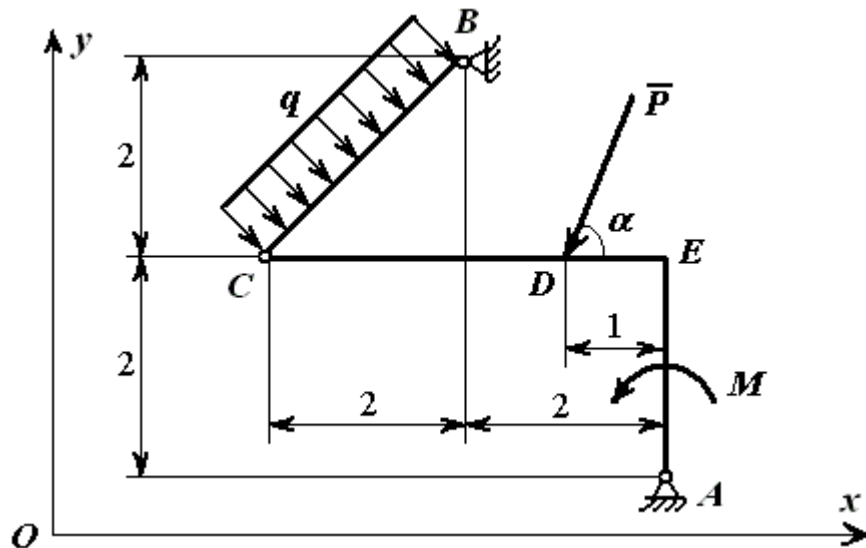


Рис. 3.8

Решение

Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой Q , приложенной в середине отрезка BC перпендикулярно отрезку,

$$Q = q \cdot BC = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ кН}.$$

Реакции в опорах A и B могут быть разложены на две составляющие: $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$.

Для определения реакции $\bar{X}_A$ нужно, чтобы неподвижная конструкция получила возможность перемещаться, причем так, чтобы работу вместе с заданными силами совершила бы только $\bar{X}_A$. Применяя принцип освобожденности от связей, заменим неподвижную опору A на подвижную по горизонтали опору, горизонтальную связь заменим на силу $\bar{X}_A$ (рис. 3.9).

Рассмотрим одно из возможных перемещений системы: стержень BC повернулся на угол $\delta\varphi_1$ вокруг неподвижной точки B , оставшаяся часть конструкции CEA вынуждена повернуться вокруг мгновенного центра вращения C_{v1} на угол $\delta\gamma_1$, точка приложения силы $\bar{X}_A$ переместится на расстояние AA' , равное величине возможного перемещения $\delta\bar{s}_A$. Перемещения точек конструкции для наглядности показаны большими, на самом деле – это бесконечно малые перемещения.

Приложенные к системе силы совершат работу на бесконечно малых перемещениях; сумма работ всех сил должна быть равна нулю:

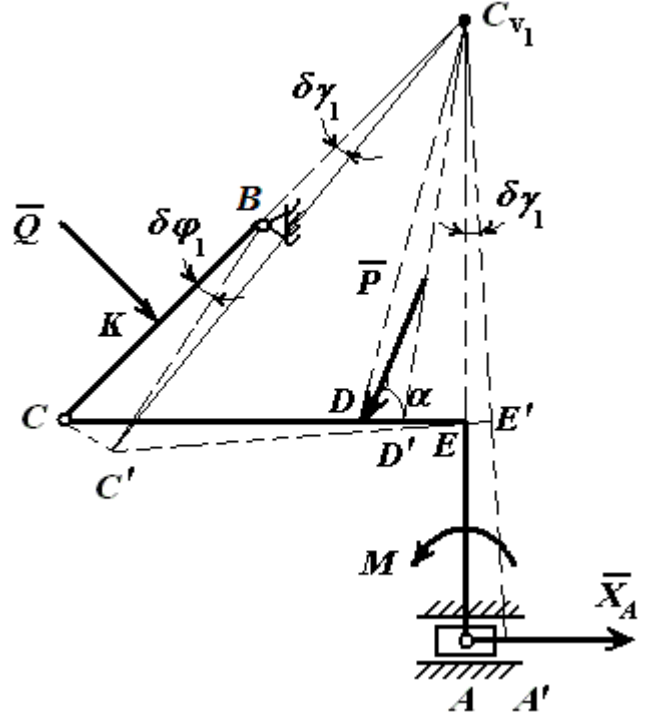


Рис. 3.9

$$\delta A(\bar{Q}) + \delta A(\bar{P}) + \delta A(M) + \delta A(\bar{X}_A) = 0;$$

$$\bar{Q} \cdot \delta \bar{s}_K + \bar{P} \cdot \delta \bar{s}_D + M \cdot \delta \gamma_1 + \bar{X}_A \cdot \delta \bar{s}_A = 0. \quad (*)$$

Выразим перемещения точек, к которым приложены силы, через малый угол $\delta\varphi_1$:

$$\delta s_K = BK \cdot \delta\varphi_1 = \sqrt{2} \cdot \delta\varphi_1; \quad \delta s_C = BC \cdot \delta\varphi_1 = 2\sqrt{2} \cdot \delta\varphi_1;$$

$$\delta\gamma_1 = \frac{\delta s_C}{CC_{v1}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \delta\varphi_1}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \delta\varphi_1; \quad \delta s_A = AC_{v1} \cdot \delta\gamma_1 = 6 \cdot \delta\gamma_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} \delta\varphi_1 = 3 \cdot \delta\varphi_1.$$

Работу силы P на перемещении δs_D удобнее найти как работу момента силы P относительно точки C_{v1} при повороте части конструкции на угол $\delta\gamma_1$. Воспользовавшись теоремой Вариньона, запишем

$$\begin{aligned} \delta A(\bar{P}) &= (P \cdot \sin 60^\circ \cdot 1) \cdot \delta\gamma_1 - (P \cdot \cos 60^\circ \cdot 4) \cdot \delta\gamma_1 = P(\sin 60^\circ - 4 \cos 60^\circ) \frac{1}{2} \delta\varphi_1 = \\ &= P\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \delta\varphi_1 = P \frac{\sqrt{3} - 4}{2} \delta\varphi_1. \end{aligned}$$

Подставим найденные соотношения в уравнение работ (*):

$$Q \cdot \sqrt{2} \cdot \delta\varphi_1 + P \frac{\sqrt{3}-4}{2} \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \frac{1}{2} \delta\varphi_1 + X_A \cdot 3 \cdot \delta\varphi_1 = 0;$$

$$4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \delta\varphi_1 + 6 \frac{\sqrt{3}-4}{2} \cdot \delta\varphi_1 + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta\varphi_1 + X_A \cdot 3 \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

Сократив на $\delta\varphi_1$, определим X_A :

$$X_A = \frac{1}{3}(-8 - 6,8 + 6) = -3,53 \text{ кН}.$$

Знак «минус» указывает на то, что реакция должна быть направлена в противоположную сторону.

Для определения реакции Y_A опору в точке A заменим на подвижную по вертикали опору, заменив вертикальную связь силой $\bar{Y}_A$ (рис. 3.10). Малый угол $\delta\varphi_2$ является возможным перемещением стержня BC , $\delta\gamma_2$ – возможное перемещение части конструкции CEA вокруг мгновенного центра скоростей C_{V_2} .

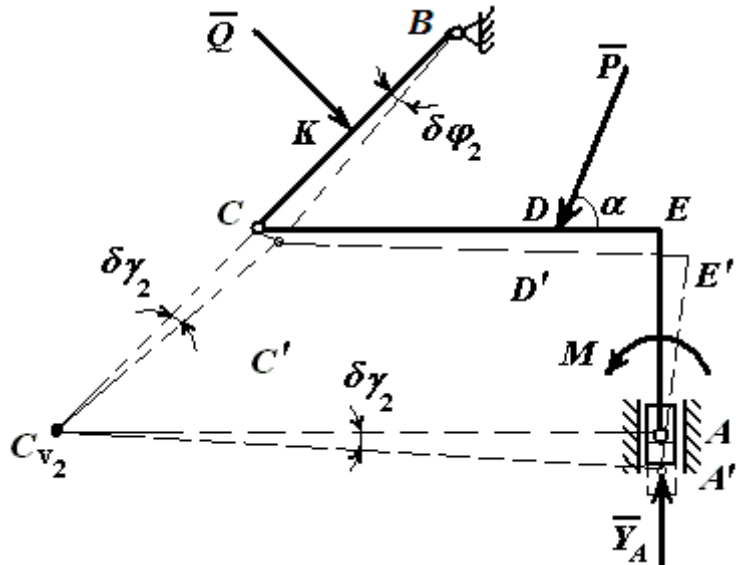


Рис. 3.10

Найдем зависимости между перемещениями точек системы:

$$\delta s_C = BC \cdot \delta\varphi_2 = CC_{V_2} \cdot \delta\gamma_2; \quad \delta\gamma_2 = \frac{BC}{CC_{V_2}} \cdot \delta\varphi_2 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2;$$

$$\delta s_K = BK \cdot \delta\varphi_2 = \sqrt{2} \cdot \delta\varphi_2; \quad \delta s_A = AC_{V_2} \cdot \delta\gamma_2 = 6 \cdot \delta\varphi_2.$$

Работу силы $\bar{P}$ снова найдем как работу момента силы относительно точки C_{V_2} при повороте части конструкции CEA на угол $\delta\gamma_2$:

$$\begin{aligned} \delta A(\bar{P}) &= (P \cdot \sin 60^\circ \cdot 5) \cdot \delta\gamma_2 - (P \cdot \cos 60^\circ \cdot 2) \cdot \delta\gamma_2 = P(5 \sin 60^\circ - 2 \cos 60^\circ) \delta\varphi_2 = \\ &= P(5 \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \frac{1}{2}) \cdot \delta\varphi_2 = P(2,5\sqrt{3} - 1) \delta\varphi_2 = P \cdot 3,33 \cdot \delta\varphi_2. \end{aligned}$$

На основании принципа возможных перемещений получим уравнение

$$Q \cdot \delta s_K + P \cdot 3,33 \cdot \delta \varphi_2 - M \cdot \delta \gamma_2 - Y_A \cdot \delta s_A = 0;$$

$$Q \cdot \sqrt{2} \cdot \delta \varphi_2 + P \cdot 3,3 \cdot \delta \varphi_2 - M \cdot \delta \varphi_2 - Y_A \cdot 6 \cdot \delta \varphi_2 = 0;$$

$$4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \delta \varphi_2 + 6 \cdot 3,3 \cdot \delta \varphi_2 - 12 \cdot \delta \varphi_2 - Y_A \cdot 6 \cdot \delta \varphi_2 = 0.$$

Сократив на $\delta \varphi_2$ и подставив числовые данные, определим Y_A :

$$Y_A = \frac{1}{6} (8 + 19,98 - 12) = 2,66 \text{ кН.}$$

Реакция опоры A равна

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-3,53)^2 + 2,66^2} = 4,42 \text{ кН.}$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\bar{R}_A^{\wedge} \bar{i}) = \frac{X_A}{R_A} = \frac{-3,53}{4,42} = -0,8, \quad (\bar{R}_A^{\wedge} \bar{i}) = 143^\circ;$$

$$\cos(\bar{R}_A^{\wedge} \bar{j}) = \frac{Y_A}{R_A} = \frac{2,66}{4,42} = 0,6, \quad (\bar{R}_A^{\wedge} \bar{j}) = 53^\circ.$$

Аналогично определяем реакции в опоре B .

Для определения реакции $\bar{X}_B$ заменим неподвижную опору B на подвижную, позволяющую горизонтальное смещение точки B (рис. 3.11). Пунктирными линиями показано возможное перемещение конструкции. Часть CEA вращается вокруг неподвижной опоры A , стержень BC поворачивается вокруг мгновенного центра вращения C_{v3} . Точка приложения силы $\bar{X}_B$ может переместиться на расстояние BB' , равное величине возможного перемещения δs_B .

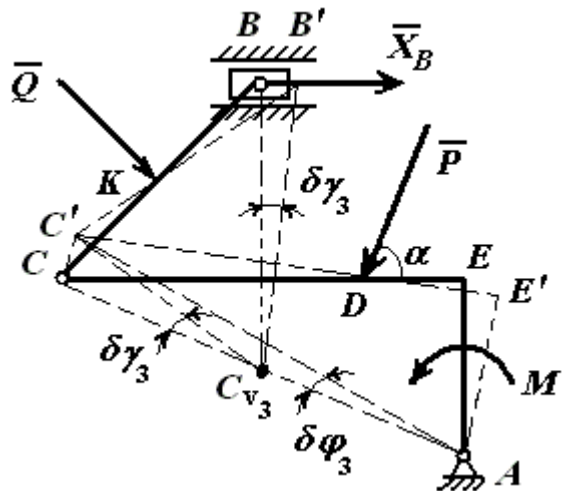


Рис. 3.11

Приложенные к системе силы совершат работы, сумма которых должна быть равна нулю:

$$\delta A(\bar{Q}) + \delta A(\bar{P}) + \delta A(M) + \delta A(\bar{X}_B) = 0.$$

Выразим возможные перемещения точек, к которым приложены силы, через малый угол $\delta\varphi_3$:

$$AC \cdot \delta\varphi_3 = CC_{V_3} \cdot \delta\gamma_3; \quad \delta\gamma_3 = \frac{AC}{CC_{V_3}} \delta\varphi_3 = 2 \cdot \delta\varphi_3;$$

$$\delta s_B = BC_{V_3} \cdot \delta\gamma_3 = 3 \cdot 2 \cdot \delta\varphi_3 = 6 \cdot \delta\varphi_3.$$

Работу сил $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ удобнее выразить через работу моментов этих сил относительно точек, вокруг которых поворачиваются детали (A и C_{V_3}):

$$\delta A(\bar{P}) = -P \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 \cdot \delta\varphi_3 - P \sin 60^\circ \cdot 1 \cdot \delta\varphi_3 = -P \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \delta\varphi_3;$$

$$\begin{aligned} \delta A(\bar{Q}) &= Q \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 \cdot \delta\gamma_3 - Q \sin 45^\circ \cdot 1 \cdot \delta\gamma_3 = Q \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \right) \cdot \delta\gamma_3 = \\ &= Q \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \delta\gamma_3 = Q \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \delta\varphi_3 = Q \cdot \sqrt{2} \cdot \delta\varphi_3. \end{aligned}$$

Подставим найденные соотношения в уравнение работ:

$$Q \cdot \sqrt{2} \cdot \delta\varphi_3 - P \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cdot \delta\varphi_3 - M \cdot \delta\varphi_3 + X_B \cdot 6 \cdot \delta\varphi_3 = 0;$$

$$4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \delta\varphi_3 - 6 \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cdot \delta\varphi_3 - 12 \cdot \delta\varphi_3 + X_B \cdot 6 \cdot \delta\varphi_3 = 0.$$

Сократив на $\delta\varphi_3$, определим X_B :

$$X_B = \frac{1}{6} (-8 + 11,19 + 12) = 2,53 \text{ кН.}$$

Для определения вертикальной составляющей реакции в опоре B изменим опору так, чтобы точка B могла перемещаться по вертикали, заменив связь по этому направлению реакцией $\bar{Y}_B$.

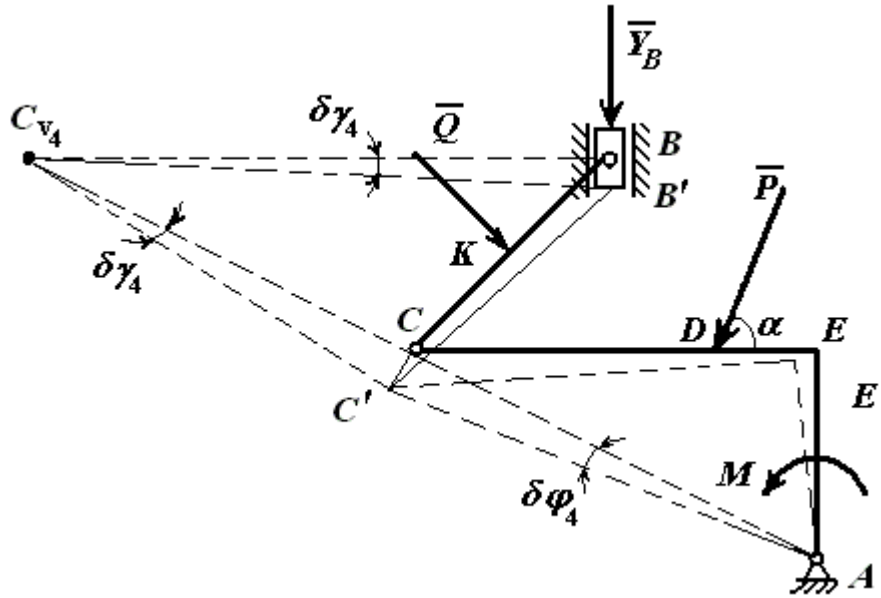


Рис. 3.12

На рис. 3.12 показано возможное перемещение конструкции в этом случае. Часть **CEA** может поворачиваться вокруг точки **A**, а стержень **BC** – вокруг мгновенного центра вращения **C_{V4}**.

Работу сил **P** и **Q** при составлении уравнения работ определим, как и в предыдущих случаях, как работу моментов при вращении частей конструкции вокруг соответствующих точек, т.е. при повороте **CEA** и **BC** на углы соответственно $\delta\varphi_4$ и $\delta\gamma_4$ (рис. 3.12).

Зависимости между перемещениями точек системы:

$$\delta s_C = AC \cdot \delta\varphi_4 = CC_{V_4} \cdot \delta\gamma_4; \quad \delta\gamma_4 = \frac{AC}{CC_{V_4}} \cdot \delta\varphi_4 = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} \cdot \delta\varphi_4 = \delta\varphi_4;$$

$$\delta s_B = BC_{V_4} \cdot \delta\gamma_4 = 6 \cdot \delta\varphi_4.$$

Уравнение работ:

$$Q \cdot \sin 45^\circ \cdot 5 \cdot \delta\gamma_4 - Q \cdot \cos 45^\circ \cdot 1 \cdot \delta\gamma_4 + P \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 \cdot \delta\varphi_4 + P \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 \cdot \delta\varphi_4 + \\ + M \cdot \delta\varphi_4 + Y_B \cdot 6 \cdot \delta\varphi_4 = 0.$$

Подставляем числовые данные:

$$4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \right) \cdot \delta\varphi_4 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \right) \cdot \delta\varphi_4 + 12 \cdot \delta\varphi_4 + Y_B \cdot 6 \cdot \delta\varphi_4 = 0.$$

Сократив на $\delta\phi_4$, определим Y_B :

$$Y_B = -\frac{1}{6}(16 + 11,19 + 12) = -6,53 \text{ кН.}$$

Реакция опоры B равна

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{2,53^2 + (-6,53)^2} = 7,0 \text{ кН.}$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\hat{\bar{R}}_B \bar{i}) = \frac{X_B}{R_B} = \frac{2,53}{7,0} = 0,361, \quad (\hat{\bar{R}}_B \bar{i}) = 69^\circ;$$

$$\cos(\hat{\bar{R}}_B \bar{j}) = \frac{Y_B}{R_B} = \frac{-6,53}{7,0} = -0,933, \quad (\hat{\bar{R}}_B \bar{j}) = 159^\circ.$$

Пример 3.5

Груз весом $\bar{G}$ удерживается силой $\bar{P}$ при помощи системы из 2-х блоков (рис. 3.13, а), системы из 4-х блоков (рис. 3.13, б). Пренебрегая силами трения и массами блоков, определить зависимость сил $\bar{G}$ и $\bar{P}$ от числа пар блоков.

Решение

На рис. 3.13, а показано распределение возможных скоростей на подвижном блоке, который в данный момент времени может вращаться вокруг мгновенного центра вращения C_V . Скорость груза v_z в два раза меньше скорости точки приложения силы $\bar{P}$.

Записав принцип возможных перемещений через сумму мощностей по формуле (3.8), получим

$$P \cdot 2v_z - G \cdot v_z = 0, \quad \text{или} \quad P \cdot 2 = G, \quad P = \frac{1}{2}G,$$

т.е. прикладываемая сила меньше веса поднимаемого груза в два раза.

Для двух пар блоков распределение скоростей на подвижных блоках показано на рис. 3.13, б. Два подвижных блока могут перемещаться по вертикали с одинаковой скоростью v_z и вращаться: верхний блок – вокруг мгновенного центра вращения C_{V_1} , нижний – вокруг C_{V_2} . Скорость груза в четыре раза меньше скорости точки приложения силы $\bar{P}$.

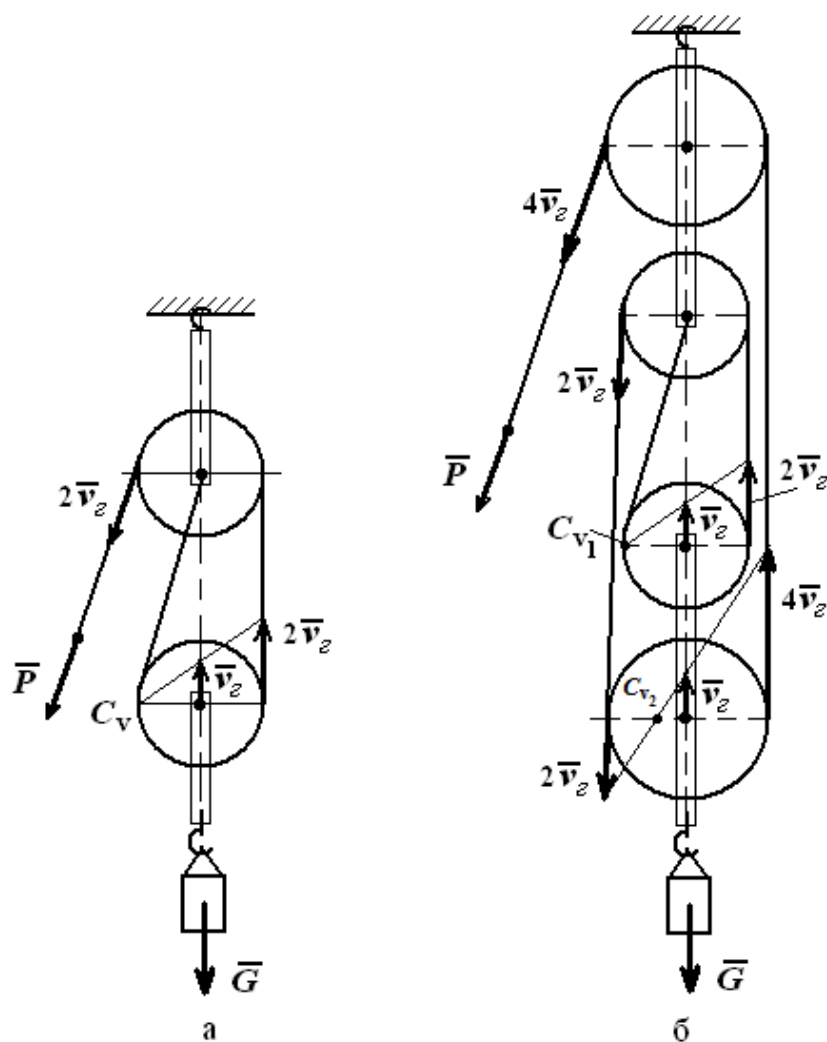


Рис. 3.13

Написав принцип возможных перемещений для этой системы, получим

$$P \cdot 4v_z - G \cdot v_z = 0, \quad \Rightarrow P = \frac{1}{4}G,$$

т.е. прикладываемая сила меньше веса поднимаемого груза в четыре раза.

Усложняя систему, т.е. увеличивая число пар блоков, можно убедиться, что, например, для трех пар блоков сила P в шесть раз меньше веса G , для четырех пар блоков – в восемь раз меньше и т.д. Таким образом, прикладываемая сила меньше веса поднимаемого груза во столько раз, сколько пар блоков имеет система. Такие системы используются в грузоподъемных механизмах (подъемные краны, талевые системы, полиспасты). Их применение позволяет поднимать большие грузы при малых усилиях на лебедке. В данном случае выполняется «золотое правило механики», выведенное Г. Галилеем: выигрываем в силе, теряем в скорости (или перемещении) и наоборот.

3.4. Общее уравнение динамики

В принципе Даламбера говорится о равновесии сил, действующих на точки движущейся механической системы (внешних сил, реакций связей, сил инерции):

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{R}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0.$$

Объединяя принцип Даламбера с принципом возможных перемещений, для систем с идеальными связями получаем выражение

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (3.9)$$

Учитывая, что в случае идеальных связей $\sum \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$, получаем

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0; \quad (3.10)$$

$$\sum (\bar{F}_k + \bar{\Phi}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0; \quad (3.11)$$

$$\sum F_k \cdot \delta s_k \cdot \cos \alpha_k + \sum \Phi_k \cdot \delta s_k \cdot \cos \alpha_k = 0. \quad (3.12)$$

Формулы (3.10)–(3.12) представляют собой различные формы записи общего уравнения динамики или принципа Даламбера-Лагранжа: **при движении механической системы с идеальными связями в любой момент времени сумма элементарных работ внешних сил и сил инерции на возможном перемещении системы равна нулю.**

3.5. Обобщенные координаты

Обобщенные координаты – это независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве. Число обобщенных координат соответствует числу степеней свободы механической системы. На рис. 3.14 приведены примеры определения положений механических систем с помощью обобщенных координат.

Положение точки на оси определяется координатой s (рис. 3.14, а); положение кривошипа на плоскости определяется углом φ (рис. 3.14, б). Эти системы имеют одну степень свободы, поскольку их положение определяется одной обобщенной координатой: s (измеряется, например, в метрах), φ (например, в радианах). Положение точки M_k в пространстве определяется тремя обобщенными координатами x_k , y_k , z_k (рис. 3.14, в), положение отрезка AB , принадлежащего плоской фигуре, также определяется тремя обобщенными координатами x_A , y_A , φ (рис. 3.14, г); эти системы имеют три степени свободы.

Положение механической системы, имеющей 4 степени свободы (рис. 3.14, д), определяется соответственно четырьмя обобщенными координатами: q_1, q_2, q_3, q_4 .

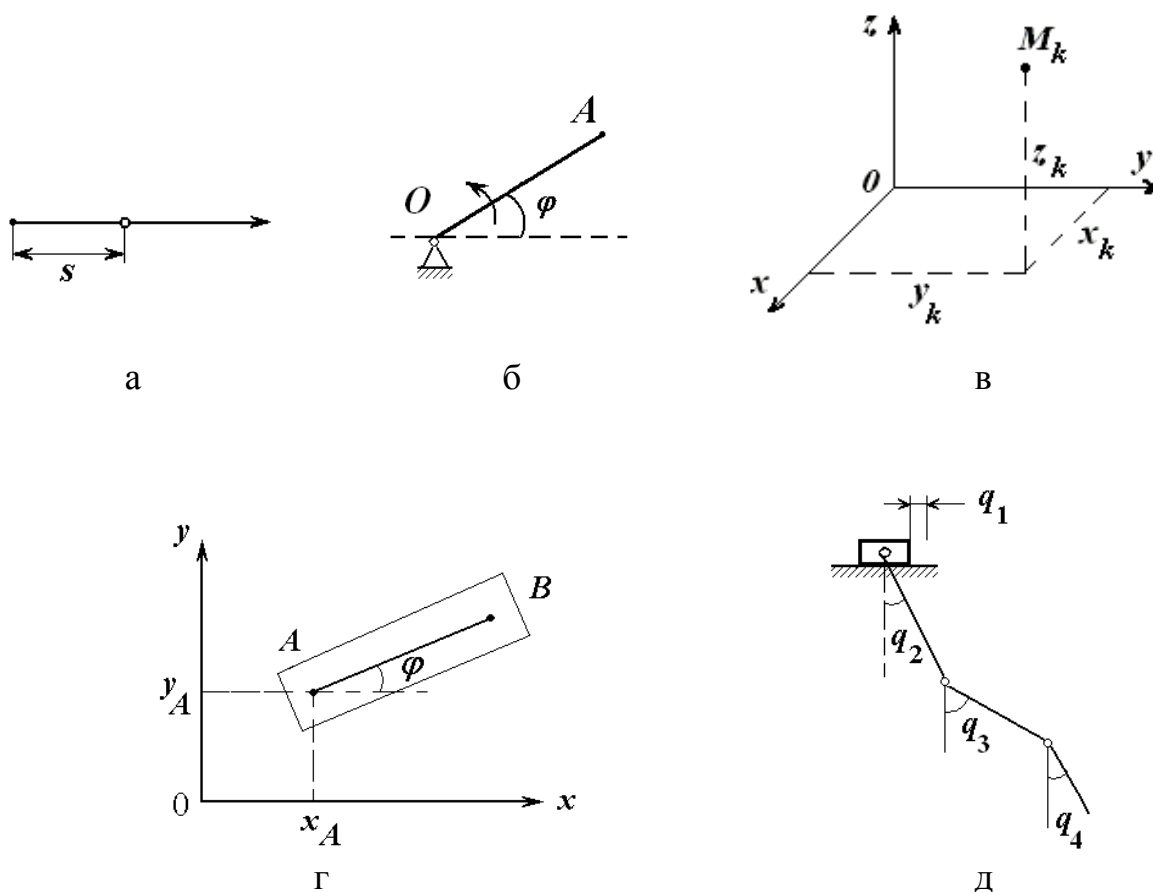


Рис. 3.14

Обобщенные координаты принято обозначать символом « q_j » ($j = 1 \div s$).

3.6. Обобщенные силы

Обобщенной силой Q_j , соответствующей обобщенной координате q_j , называют скалярную величину, определяемую отношением элементарной работы действующих сил при перемещении механической системы, вызванном приращением обобщенной координаты q_j , к величине приращения этой координаты δq_j :

$$Q_j = \frac{\delta A_j}{\delta q_j} \quad \text{или} \quad \delta A_j = Q_j \cdot \delta q_j. \quad (3.13)$$

Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты и может выражаться в единицах силы [Н] или момента [Н·м]. Число обобщенных сил для данной системы соответствует числу обобщенных координат (степеней свободы). При необходимости можно определить обобщенные силы от внешних сил (Q_j^F), обобщенные силы от реакций связей (Q_j^R) или обобщенные силы от сил инерции (Q_j^Φ). Для консервативной системы обобщенные силы равны

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (3.14)$$

Пример 3.6

Механическая система, состоящая из блока **B** массой m_B , блока **D** массой m_D и радиусом R_D , тела **A** массой m_A , приводится в движение вращающим моментом $M_{вр}$ (рис. 3.15). Определить обобщенную силу от внешних сил.

Решение

Система имеет одну степень свободы, поскольку положение всех тел определяется углом поворота φ блока **D**; этот угол примем за обобщенную координату. При движении системы перемещения точек **K** и **E** одинаковы, т.к. этот участок нити движется поступательно. Перемещение точки **O** блока **B** и груза **A** в два раза меньше перемещения точки **E** (C_V – мгновенный центр скоростей блока **B**).

Зададим обобщенной координате φ малое приращение $\delta\varphi$. Точка **K** (и точка **E**) переместится на величину $\delta s_K = R_D \cdot \delta\varphi$. Точка **O** и груз **A** переместятся на величину

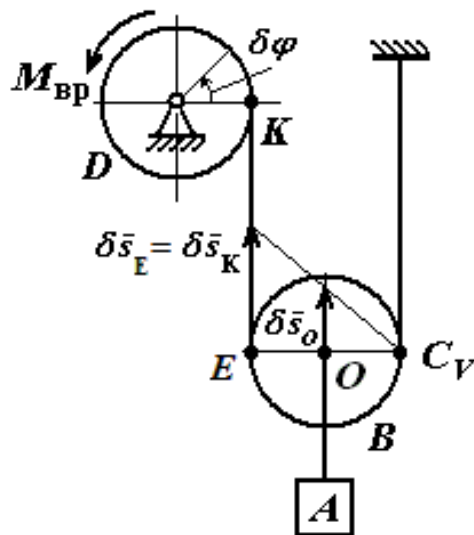


Рис. 3.15

$$\delta s_O = \frac{1}{2} \delta s_K = \frac{1}{2} R_D \cdot \delta\varphi.$$

Приложенные к механической системе силы совершат элементарную работу

$$\delta A_\varphi = M_{вр} \cdot \delta\varphi - G_B \cdot \delta s_O - G_A \cdot \delta s_O.$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi$ и найдем обобщенную силу:

$$Q_{\varphi} = \frac{\delta A_{\varphi}}{\delta \varphi} = \frac{M_{\text{вп}} \cdot \delta \varphi - m_B \cdot g \cdot \frac{1}{2} R_D \cdot \delta \varphi - m_A \cdot g \cdot \frac{1}{2} R_D \delta \varphi}{\delta \varphi};$$

$$Q_{\varphi} = M_{\text{вп}} - \frac{1}{2} R_D \cdot g(m_B + m_A) \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Пример 3.7

Груз массой m подвешен на невесомой нити длиной l (рис. 3.16). Определить обобщенную силу.

Решение

Система имеет одну степень свободы, φ – обобщенная координата, $\delta \varphi$ – приращение обобщенной координаты. Элементарная работа силы тяжести $m\vec{g}$ на малом перемещении может быть записана как работа момента силы тяжести относительно точки O :

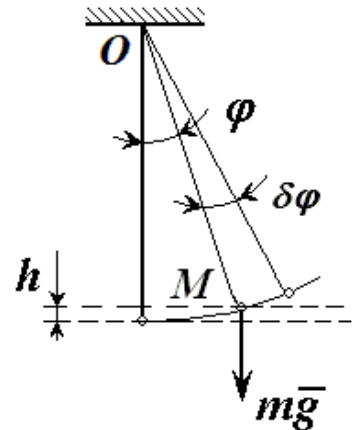


Рис. 3.16

$$\delta A_{\varphi} = -mg \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \delta \varphi; \quad Q_{\varphi} = \frac{\delta A_{\varphi}}{\delta \varphi} = -mg \cdot l \cdot \sin \varphi.$$

Другое решение задачи. Запишем потенциальную энергию для груза

$$\Pi = mgh = mg(l - l \cos \varphi);$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mg[0 - l \cdot (-\sin \varphi)] = mg \cdot l \cdot \sin \varphi; \quad Q_{\varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -mg \cdot l \cdot \sin \varphi.$$

Пример 3.8

Пренебрегая моментами сопротивления на блоках, определить обобщенные силы для механической системы, изображенной на рис. 3.17. Дано: массы грузов m_1 , m_2 , m_3 , массы блоков m_A , m_B , m_D , радиусы подвижного блока R_D , r_D , угол наклона плоскости α , коэффициент трения скольжения f .

Решение

Система имеет две степени свободы: ее положение определяют две обобщенные координаты q_1 и q_2 – перемещения грузов соответственно 1 и 2. Поэтому определяем две обобщенные силы Q_{q_1} и Q_{q_2} .

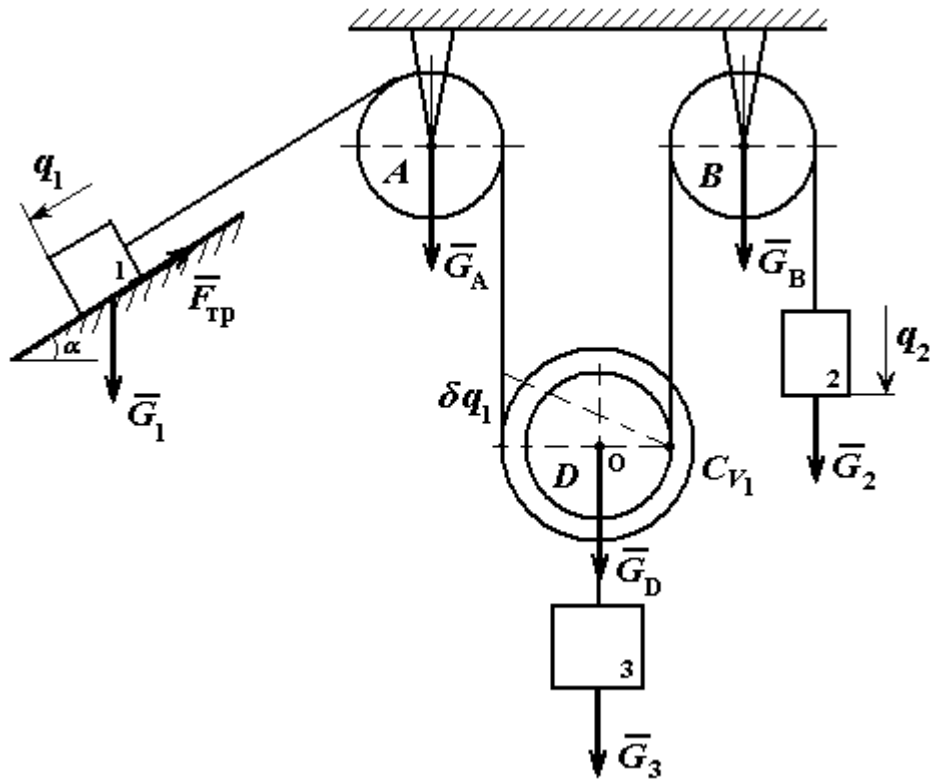


Рис. 3.17

Зададим малое приращение δq_1 обобщенной координате q_1 при условии, что груз 2 неподвижен ($\delta q_2 = 0$), и определим элементарную работу приложенных к системе сил:

$$\delta A_{q_1} = G_1 \cdot \delta q_1 \cdot \sin \alpha - F_{mp} \cdot \delta q_1 - G_D \cdot \delta s_O - G_3 \cdot \delta s_3,$$

где $F_{mp} = f \cdot N_1 = f \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha$;

$$\delta s_O = \frac{\delta q_1 \cdot r_D}{R_D + r_D}; \quad \delta s_3 = \delta s_O.$$

Силы тяжести тела 2, блоков A и B работу не совершают, т.к. эти силы приложены к неподвижным точкам.

Выразим в уравнении работ все перемещения через δq_1 и найдем обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате q_1 :

$$\delta A_{q_1} = m_1 g \cdot \delta q_1 \cdot \sin \alpha - f \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha \cdot \delta q_1 - m_D g \cdot \frac{\delta q_1 \cdot r_D}{R_D + r_D} - m_3 g \cdot \frac{\delta q_1 \cdot r_D}{R_D + r_D};$$

$$Q_{q_1} = \frac{\delta A_{q_1}}{\delta q_1} = m_1 g \cdot \sin \alpha - f \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha - m_D g \cdot \frac{r_D}{R_D + r_D} - m_3 g \cdot \frac{r_D}{R_D + r_D}.$$

Для определения обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате q_2 , зададим последней малое приращение δq_2 при условии, что теперь груз 1 неподвижен ($\delta q_1 = 0$), и определим элементарную работу приложенных к системе сил:

$$\delta A_{q_2} = G_2 \cdot \delta q_2 - G_D \cdot \delta s_O - G_3 \cdot \delta s_3.$$

Центры масс груза 1, блоков **A** и **B** неподвижны, и их силы тяжести работу не совершают. Блок **D** в данном случае будет поворачиваться вокруг мгновенного центра вращения C_{V_2} (рис. 3.18). Перемещения груза 3 и точки **O** блока **D** одинаковы и равны

$$\delta s_O = \delta s_3 = \frac{\delta q_2 \cdot R_D}{R_D + r_D}.$$

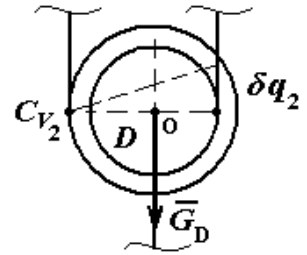


Рис. 3.18

Выразим в уравнении работ все перемещения через δq_2 и найдем обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате q_2 :

$$\delta A_{q_2} = m_2 g \cdot \delta q_2 - m_D g \cdot \frac{\delta q_2 \cdot R_D}{R_D + r_D} - m_3 g \cdot \frac{\delta q_2 \cdot R_D}{R_D + r_D};$$

$$Q_{q_2} = \frac{\delta A_{q_2}}{\delta q_2} = m_2 g - m_D g \cdot \frac{R_D}{R_D + r_D} - m_3 g \cdot \frac{R_D}{R_D + r_D}.$$

Далее приведены примеры решения задач с помощью общего уравнения динамики.

Пример 3.9

Определить ускорение точки приложения силы $\vec{F}$, приводящей в движение из состояния покоя механическую систему, состоящую из однородного сплошного цилиндра **A** и ступенчатого блока **B** (рис. 3.19), а также определить натяжение нити между цилиндром и блоком.

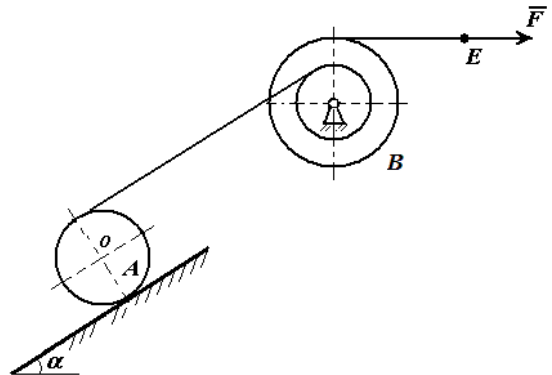


Рис. 3.19

Дано: m_A , R_A , m_B , R_B , r_B , α , f_k – коэффициент трения качения цилиндра A , i – радиус инерции ступенчатого блока B . Проскальзывание цилиндра по наклонной плоскости отсутствует.

Решение

В соответствии с общим уравнением динамики для систем с идеальными связями сумма работ всех действующих внешних сил и сил инерции на возможном перемещении должна быть равна нулю. На рис. 3.20 показаны все действующие на данную механическую систему силы. Реакции опор $\bar{R}_B$ и $\bar{N}_A$ приложены в неподвижных точках, поэтому они при движении системы работу не совершают; момент сопротивления качению цилиндра $M_{сопр}$ отнесем к разряду внешних сил. Это позволяет считать данную систему системой с идеальными связями.

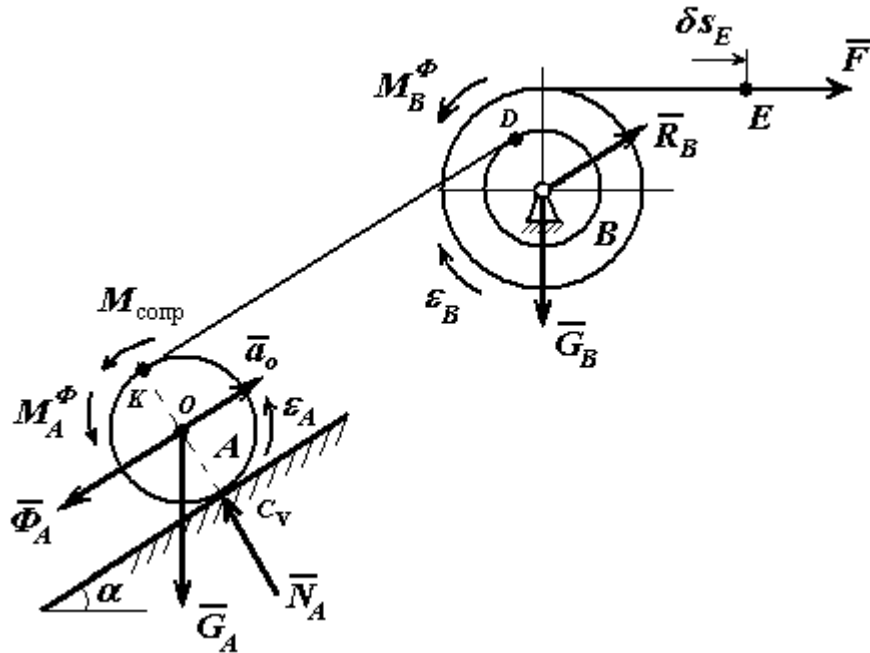


Рис. 3.20

Силы инерции блока B , вращающегося вокруг неподвижной оси, приводятся к главному моменту сил инерции

$$M_B^\Phi = I_B \epsilon_B = m_B i^2 \epsilon_B.$$

Момент сил инерции M_B^Φ направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока B .

Силы инерции цилиндра A , совершающего плоское движение, приводятся к главному вектору сил инерции $\Phi_A = m_A a_O$ и к главному моменту сил инерции $M_A^\Phi = I_A \epsilon_A = \frac{m_A R_A^2}{2} \cdot \epsilon_A$. Главный вектор и главный момент сил инер-

ции направлены противоположно соответственно ускорению точки O и угловому ускорению цилиндра.

Зависимости между линейными и угловыми ускорениями и возможными перемещениями удобнее находить, используя зависимости между скоростями точек и угловыми скоростями тел. Для линейных и угловых скоростей можно написать следующие соотношения:

$$\omega_B = \frac{v_E}{R_B}; \quad v_D = v_K = \omega_B \cdot r_B = \frac{v_E \cdot r_B}{R_B};$$

$$\omega_A = \frac{v_K}{2R_A} = \frac{v_E \cdot r_B}{R_B \cdot 2R_A}; \quad v_O = \omega_A \cdot R_A = \frac{v_E \cdot r_B}{2R_B}.$$

Производные по времени от этих выражений дают зависимости между ускорениями:

$$a_E = \dot{v}_E; \quad \varepsilon_B = \frac{a_E}{R_B}; \quad a_D = a_K = \varepsilon_B \cdot r_B = \frac{a_E \cdot r_B}{R_B};$$

$$\varepsilon_A = \frac{a_K}{2R_A} = \frac{a_E \cdot r_B}{R_B \cdot 2R_A}; \quad a_O = \varepsilon_A \cdot R_A = \frac{a_E \cdot r_B}{2R_B}.$$

Проинтегрировав зависимости между линейными и угловыми скоростями данной системы, получим зависимости между возможными перемещениями:

$$\delta\varphi_B = \frac{\delta s_E}{R_B}; \quad \delta s_D = \delta s_K = \delta\varphi_B \cdot r_B = \frac{\delta s_E \cdot r_B}{R_B};$$

$$\delta\varphi_A = \frac{\delta s_K}{2R_A} = \frac{\delta s_E \cdot r_B}{R_B \cdot 2R_A}; \quad \delta s_O = \delta\varphi_A \cdot R_A = \frac{\delta s_E \cdot r_B}{2R_B}.$$

Зададим системе возможное перемещение и составим уравнение работ:

$$F \cdot \delta s_E - M_B^\Phi \cdot \delta\varphi_B - G_A \cdot \delta s_O \sin \alpha - M_{\text{comp}} \cdot \delta\varphi_A - \Phi_A \cdot \delta s_O - M_A^\Phi \cdot \delta\varphi_A = 0.$$

Подставляем данные задачи и полученные выше выражения в это уравнение работ:

$$\begin{aligned} F \cdot \delta s_E - m_B i^2 \cdot \frac{a_E}{R_B} \frac{\delta s_E}{R_B} - m_A g \cdot \frac{\delta s_E \cdot r_B}{2R_B} \sin \alpha - m_A g \cos \alpha \cdot f_k \cdot \frac{\delta s_E \cdot r_B}{R_B \cdot 2R_A} - \\ - m_A \frac{a_E \cdot r_B}{2R_B} \cdot \frac{\delta s_E \cdot r_B}{2R_B} - \frac{m_A R_A^2}{2} \cdot \frac{a_E \cdot r_B}{R_B \cdot 2R_A} \cdot \frac{\delta s_E \cdot r_B}{R_B \cdot 2R_A} = 0. \end{aligned}$$

Из полученного выражения можно определить ускорение точки E :

$$F - m_A g \frac{r_B}{2R_B} \sin \alpha - m_A g \cos \alpha \cdot f_k \frac{r_B}{R_B \cdot 2R_A} = a_E \left(m_B \frac{i^2}{R_B^2} + m_A \frac{r_B^2}{4R_B^2} + \frac{m_A r_B^2}{8R_B^2} \right);$$

$$a_E = \frac{F - \frac{1}{2} m_A g \frac{r_B}{R_B} \left(\sin \alpha + \cos \alpha \frac{f_k}{R_A} \right)}{\frac{1}{R_B^2} \left(m_B i^2 + \frac{3}{8} m_A r_B^2 \right)}.$$

Проинтегрировав дважды это выражение для ускорения с учетом начальных условий, можно найти закон движения точки E .

Натяжение нити на участке KD является внутренней силой в данной механической системе. Чтобы эта сила стала внешней, систему нужно разделить на две части и записать общее уравнение динамики для любой из этих частей (рис. 3.21):

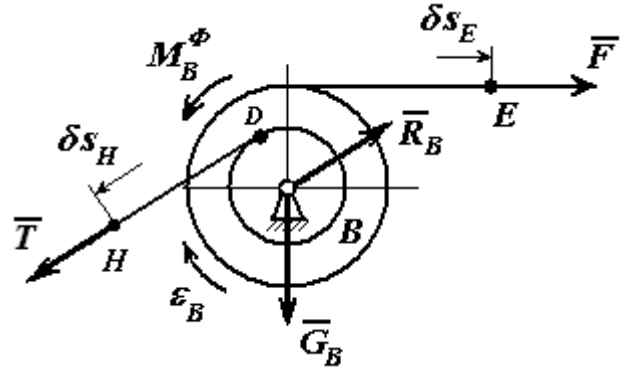


Рис. 3.21

$$F \cdot \delta s_E - M_B^\phi \cdot \delta \varphi_B - T \cdot \delta s_H = 0;$$

$$\delta s_H = \delta s_D = \frac{\delta s_E \cdot r_B}{R_B};$$

$$F \cdot \delta s_E - m_B i^2 \cdot \frac{a_E}{R_B} \frac{\delta s_E}{R_B} - T \cdot \frac{\delta s_E \cdot r_B}{R_B} = 0; \quad T = \frac{R_B}{r_B} \left(F - m_B i^2 \cdot \frac{a_E}{R_B^2} \right).$$

Подставляя в последнее выражение найденное ранее ускорение a_E точки E , определим натяжение нити.

Пример 3.10

Найти уравнения движения механической системы, представленной на рис. 3.22. Дано: $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, r_4, r_5, f$ – коэффициент трения скольжения тела 2. Массами нитей пренебречь, силы сопротивления в подшипниках не учитывать, колеса считать сплошными однородными дисками. Механизм расположен в вертикальной плоскости.

Решение

Данная система имеет две степени свободы (рис. 3.22), ее положение определяется двумя обобщенными координатами. За обобщенные координаты можно принять: q_1 – вертикальное перемещение точки O (оси диска 4), q_2 – угол поворота диска 4 вокруг оси O . Заданием этих обобщенных координат определяется перемещение всех тел, входящих в систему:

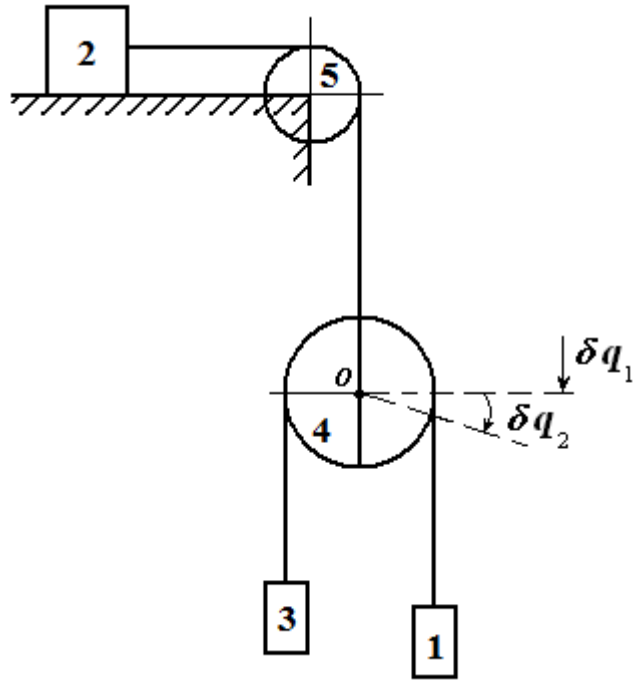


Рис. 3.22

$$s_1 = q_1 + r_4 \cdot q_2;$$

$$s_2 = s_O = q_1;$$

$$s_3 = q_1 - r_4 \cdot q_2;$$

$$\varphi_5 = \frac{q_1}{r_5}; \quad \varphi_4 = q_2.$$

Вторые производные от полученных выражений определяют линейные и угловые ускорения тел:

$$a_1 = \ddot{s}_1 = \ddot{q}_1 + r_4 \cdot \ddot{q}_2; \quad a_2 = a_O = \ddot{q}_1; \quad a_3 = \ddot{s}_3 = \ddot{q}_1 - r_4 \cdot \ddot{q}_2;$$

$$\varepsilon_5 = \ddot{\varphi}_5 = \frac{\ddot{q}_1}{r_5}; \quad \varepsilon_4 = \ddot{\varphi}_4 = \ddot{q}_2.$$

Покажем все действующие на механическую систему внешние силы и силы инерции (рис. 3.23). Силы инерции блока 4, движущегося плоскопараллельно, приводятся к главному вектору Φ_4 и главному моменту M_4^Φ . Силы инерции блока 5, вращающегося вокруг неподвижной оси, приводятся к главному моменту сил инерции M_5^Φ . Определим величины приложенных сил:

$$G_1 = m_1 g; \quad G_2 = m_2 g; \quad G_3 = m_3 g; \quad G_4 = m_4 g; \quad G_5 = m_5 g;$$

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = m_1 (\ddot{q}_1 + r_4 \cdot \ddot{q}_2); \quad \Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 \ddot{q}_1;$$

$$\Phi_3 = m_3 a_3 = m_3 (\ddot{q}_1 - r_4 \cdot \ddot{q}_2); \quad \Phi_4 = m_4 \ddot{q}_1;$$

$$M_4^\Phi = I_4 \varepsilon_4 = \frac{m_4 r_4^2}{2} \ddot{q}_2; \quad M_5^\Phi = I_5 \varepsilon_5 = \frac{m_5 r_5^2}{2} \frac{\ddot{q}_1}{r_5} = \frac{m_5 r_5}{2} \ddot{q}_1;$$

$$F_{mp} = f \cdot N_2 = f \cdot m_2 g.$$

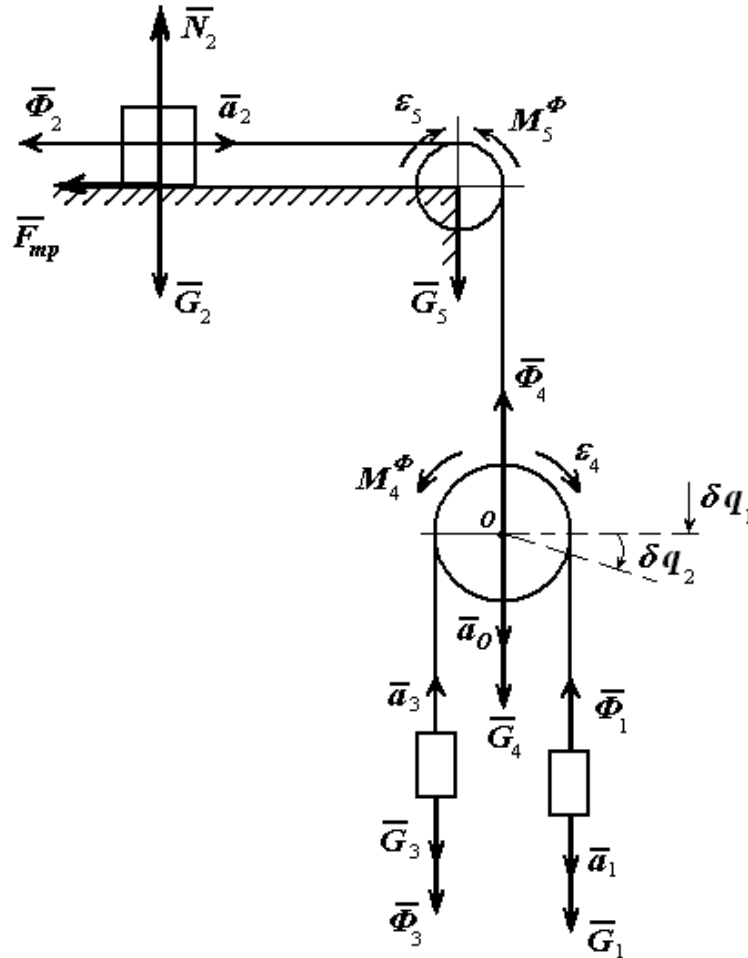


Рис. 3.23

Для составления общего уравнения динамики дадим обобщенной координате q_1 малое приращение δq_1 (при этом координата q_2 не изменяется). Составим уравнение работ:

$$G_1 \cdot \delta q_1 - \Phi_1 \cdot \delta q_1 + G_3 \cdot \delta q_1 + \Phi_3 \cdot \delta q_1 + G_4 \cdot \delta q_1 - \Phi_4 \cdot \delta q_1 - F_{mp} \cdot \delta q_1 - \\ - \Phi_2 \cdot \delta q_1 - M_5^\Phi \cdot \delta \varphi_5 = 0. \quad (*)$$

Теперь дадим обобщенной координате q_2 малое приращение δq_2 (при этом координата q_1 не изменяется) и также составим уравнение работ:

$$G_1 \cdot r_4 \cdot \delta q_2 - \Phi_1 \cdot r_4 \cdot \delta q_2 - G_3 \cdot r_4 \cdot \delta q_2 - \Phi_3 \cdot r_4 \cdot \delta q_2 - M_4^\Phi \cdot \delta q_2 = 0. (**)$$

В этих двух уравнениях работ сократим возможные перемещения и подставим найденные ранее соотношения для ускорений и сил:

$$m_1 g - m_1(\ddot{q}_1 + r_4 \ddot{q}_2) + m_3 g + m_3(\ddot{q}_1 - r_4 \ddot{q}_2) + m_4 g - m_4 \ddot{q}_1 - f \cdot m_2 g - \\ - m_2 \ddot{q}_1 - \frac{m_5 \cdot r_5}{2} \ddot{q}_1 \frac{1}{r_5} = 0;$$

$$m_1 g \cdot r_4 - m_1 \cdot r_4(\ddot{q}_1 + r_4 \ddot{q}_2) - m_3 g \cdot r_4 - m_3 \cdot r_4(\ddot{q}_1 - r_4 \ddot{q}_2) - \frac{m_4 r_4^2}{2} \ddot{q}_2 = 0.$$

Перепишем оба выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 g + m_3 g + m_4 g - f \cdot m_2 g - \ddot{q}_1(m_1 + m_2 - m_3 + m_4 + \frac{m_5}{2}) - \ddot{q}_2 r_4(m_1 + m_3) = 0, \\ m_1 g - m_3 g - \ddot{q}_1(m_1 + m_3) - \ddot{q}_2 \cdot r_4(m_1 - m_3 + \frac{1}{2} m_4) = 0. \end{array} \right.$$

Решая совместно полученные выражения, можно найти $\ddot{q}_1$ и $\ddot{q}_2$. Затем, интегрируя дважды по времени полученные формулы, можно найти закон движения точки **O** блока 4 и закон вращения блока 4.

3.7. Уравнения Лагранжа второго рода

Для механической системы с голономными стационарными и идеальными связями общее уравнение динамики (формула (3.10)) может быть записано в виде

$$\sum_{k=1}^n \left(\bar{F}_k - m_k \frac{d \bar{v}_k}{d t} \right) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \quad (3.15)$$

где s – число степеней свободы;

q_1, q_j, q_s – обобщенные координаты;

$\delta \bar{r}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j$ – возможное перемещение k -й точки.

Изменив порядок суммирования, запишем

$$\sum_{j=1}^s \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n m_k \frac{d \bar{v}_k}{d t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \cdot \delta q_j = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = Q_j \cdot \delta q_j = \delta A - \text{элементарная работа внешних сил};$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = Q_j - \text{обобщенная сила от внешних сил.}$$

Вариации обобщенных координат $\delta q_j \neq 0$, следовательно, равно нулю выражение в скобках:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n m_k \frac{d \bar{v}_k}{d t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = 0,$$

или

$$Q_j - \sum_{k=1}^n m_k \frac{d \bar{v}_k}{d t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1 \div s. \quad (3.16)$$

Для стационарных связей можно получить выражения

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j}, \quad (3.17)$$

которые называются **тождествами Лагранжа**.

Производная по времени от двух переменных

$$\frac{d}{d t} \left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{d \bar{v}_k}{d t} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} + \bar{v}_k \cdot \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right).$$

С учетом этого выражения формулу (3.16) перепишем в виде

$$Q_j - \sum_{k=1}^n m_k \frac{d}{d t} \left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) + \sum_{k=1}^n m_k \cdot \bar{v}_k \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Подставляя выражения (3.17) в формулу (3.18), получим

$$Q_j - \sum_{k=1}^n m_k \frac{d}{dt} \left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{k=1}^n m_k \cdot \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_j} = 0.$$

Внесем массу m_k и скорость $\bar{v}_k$ под знак производной и поменяем порядок суммирования и дифференцирования (при этом учтем, что $\bar{v}_k \cdot \bar{v}_k = v_k^2$):

$$Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}}{\partial q_j} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1 \div s, \quad (3.19)$$

или

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \end{cases}$$

Получили s дифференциальных уравнений движения механической системы в обобщенных координатах, называемых **уравнениями Лагранжа второго рода**.

Для консервативной системы обобщенные силы можно выразить через потенциальную энергию (формула (3.16)). Тогда уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1 \div s. \quad (3.20)$$

Выражение $T - \Pi = L$ называется функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом. Потенциальная энергия зависит от положения системы, т.е.

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s);$$

кинетическая энергия зависит от скоростей точек системы, которые в свою очередь зависят от положения системы:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s),$$

следовательно, функция Лагранжа зависит и от положения системы, и от скоростей точек системы:

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s).$$

Примем $T = L + \Pi$ и найдем производные этого выражения по скоростям и по положениям:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}; \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Подставляя последние выражения в формулу (3.20), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1 \div s. \quad (3.21)$$

Формула (3.21) выражает **уравнения Лагранжа второго рода**, записанные через кинетический потенциал.

Уравнения Лагранжа второго рода позволяют составить дифференциальные уравнения движения механической системы, имеющей одну или несколько степеней свободы.

Пример 3.11

Для механической системы (рис. 3.24), движущейся под действием силы F из состояния покоя, определить ускорение точки E приложения силы. Дано: $m_A, m_B, R_A, R_B, r_B, \alpha, F, i$ – радиус инерции блока B , f_k – коэффициент трения качения цилиндра A , A – сплошной однородный цилиндр. Проскальзывание цилиндра A по наклонной плоскости отсутствует.

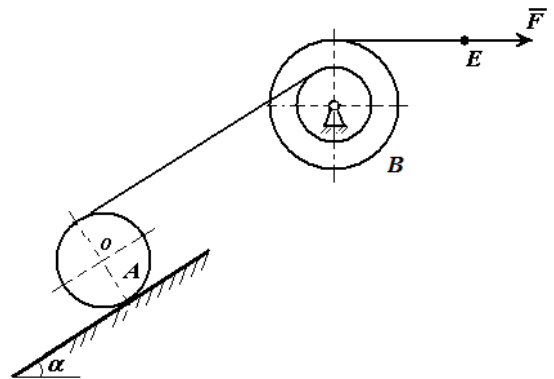


Рис. 3.24

Решение

Система имеет одну степень свободы, т.е. для определения положения механической системы достаточно ввести одну обобщенную координату. За обобщенную координату примем перемещение s_E точки E (рис. 3.25).

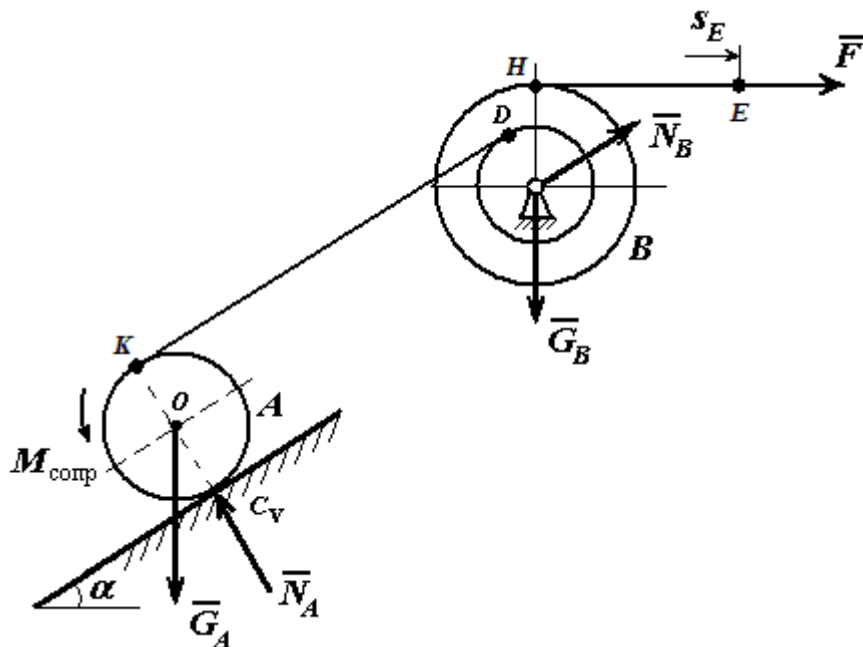


Рис. 3.25

$$\frac{ds_E}{dt} = \dot{s}_E - \text{обобщенная скорость точки } E;$$

$$\frac{d^2 s_E}{dt^2} = \ddot{s}_E - \text{ускорение точки } E.$$

Уравнение Лагранжа второго рода для данной системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_E} \right) - \frac{\partial T}{\partial s_E} = Q_{s_E},$$

где T – кинетическая энергия системы;
 Q_{s_E} – обобщенная сила от внешних сил.

Выразим угловые и линейные скорости тел и их точек через обобщенную скорость $\dot{s}_E$:

$$v_H = v_E = \dot{s}_E; \quad \omega_B = \frac{v_H}{R_B} = \frac{\dot{s}_E}{R_B}; \quad v_D = v_K = \omega_B \cdot r_B = \dot{s}_E \cdot \frac{r_B}{R_B};$$

$$\omega_A = \frac{v_K}{KC_v} = \frac{v_K}{2R_A} = \frac{\dot{s}_E \cdot r_B}{R_B \cdot 2R_A}; \quad v_O = \omega_A \cdot R_A = \frac{\dot{s}_E \cdot r_B}{2R_B}. \quad (*)$$

Кинетическая энергия механической системы

$$T = T_A + T_B = \frac{m_A v_O^2}{2} + \frac{I_A \omega_A^2}{2} + \frac{I_B \omega_B^2}{2}.$$

Моменты инерции тел:

$$I_A = \frac{m_A R_A^2}{2}, \quad I_B = m_B \cdot i^2.$$

Подставим эти выражения в формулу для кинетической энергии:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_A}{2} \left(\frac{\dot{s}_E \cdot r_B}{2R_B} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_A R_A^2}{2} \left(\frac{\dot{s}_E \cdot r_B}{2R_B \cdot R_A} \right)^2 + \frac{1}{2} m_B i^2 \left(\frac{\dot{s}_E}{R_B} \right)^2 = \\ &= \frac{\dot{s}_E^2}{2} \left(\frac{3m_A \cdot r_B^2}{8R_B^2} + m_B \frac{i^2}{R_B^2} \right) = \frac{\dot{s}_E^2}{2} \cdot C_1; \end{aligned}$$

$$T = \frac{\dot{s}_E^2}{2} \cdot C_1, \quad \text{где } C_1 - \text{постоянная величина; } C_1 = \frac{3m_A \cdot r_B^2}{8R_B^2} + m_B \frac{i^2}{R_B^2}.$$

Найдем производные кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial s_E} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_E} = \dot{s}_E \cdot C_1; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_E} \right) = \ddot{s}_E \cdot C_1.$$

Обобщенная сила определяется из соотношения

$$Q_{s_E} = \frac{\delta A_{s_E}}{\delta s_E},$$

где s_E – возможное перемещение точки E ;

A_{s_E} – элементарная работа внешних сил при малом перемещении точек приложения этих сил (рис. 3.25).

Малые перемещения определим, проинтегрировав выражения для скоростей (*):

$$\delta s_O = \frac{\delta s_E \cdot r_B}{2R_B}; \quad \delta \varphi_A = \frac{\delta s_E \cdot r_B}{2R_B \cdot R_A}.$$

Работа силы F : $\delta A_F = F \cdot \delta s_E$.

Работа силы тяжести цилиндра A :

$$\delta A_{G_A} = -m_A g \cdot \sin \alpha \cdot \delta s_O = -m_A g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\delta s_E \cdot r_B}{2R_B}.$$

Работа момента сопротивления при качении цилиндра A :

$$\delta A_{M_{\text{comp}}} = -f_k m_A g \cdot \cos \alpha \cdot \delta \varphi_A = -f_k m_A g \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\delta s_E \cdot r_B}{2R_B \cdot R_A}.$$

Сила тяжести блока B и реакция опоры N_B приложены в неподвижной точке, их работа равна нулю. Реакция наклонной поверхности N_A приложена в точке, совпадающей с мгновенным центром скоростей C_V , поэтому работа этой реакции равна нулю.

Полная работа сил на малом перемещении:

$$\delta A_{S_E} = F \cdot \delta s_E - m_A g \sin \alpha \frac{\delta s_E \cdot r_B}{2R_B} - f_k m_A g \cos \alpha \frac{\delta s_E \cdot r_B}{2R_B \cdot R_A}.$$

Обобщенная сила

$$Q_{S_E} = F - m_A g \sin \alpha \frac{r_B}{2R_B} - f_k m_A g \cos \alpha \frac{r_B}{2R_B \cdot R_A}.$$

Подставив найденные величины в уравнение Лагранжа второго рода, получим

$$\ddot{s}_E \cdot C_1 - 0 = F - m_A g \sin \alpha \frac{r_B}{2R_B} - f_k m_A g \cos \alpha \frac{r_B}{2R_B \cdot R_A};$$

$$\ddot{s}_E = \frac{F - m_A g \sin \alpha \frac{r_B}{2R_B} - f_k m_A g \cos \alpha \frac{r_B}{2R_B \cdot R_A}}{C_1}.$$

Подставим значение C_1 :

$$\ddot{s}_E = \frac{F - m_A g \sin \alpha \frac{r_B}{2R_B} - f_k m_A g \cos \alpha \frac{r_B}{2R_B \cdot R_A}}{\frac{3m_A \cdot r_B^2}{8R_B^2} + m_B \frac{i^2}{R_B^2}};$$

$$\ddot{s}_E = \frac{F - m_A g \sin \alpha \frac{r_B}{2R_B} - f_k m_A g \cos \alpha \frac{r_B}{2R_B \cdot R_A}}{\frac{1}{R_B^2} \left(\frac{3}{8} m_A \cdot r_B^2 + m_B i^2 \right)} - \text{это ускорение точки } E.$$

Такой же результат был получен при решении данной задачи с помощью общего уравнения динамики (см. пример 3.9).

Пример 3.12

Определить ускорение призмы 1 и угловое ускорение блока 2 механической системы (рис. 3.26). Дано: m_1 , m_2 , m_3 , R_2 , R_3 , α . Блок 2 и каток 3 считать однородными сплошными цилиндрами.

Решение

Механическая система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты можно принять: x – перемещение призмы 1 по горизонтальной поверхности, φ – угол поворота блока 2 относительно оси, закрепленной на призме.

Уравнения Лагранжа второго рода будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi,$$

где $\dot{x} = v$ – скорость призмы 1 при ее движении по горизонтальной поверхности;

$\dot{\varphi} = \omega$ – угловая скорость блока 2.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех тел системы: $T = T_1 + T_2 + T_3$.

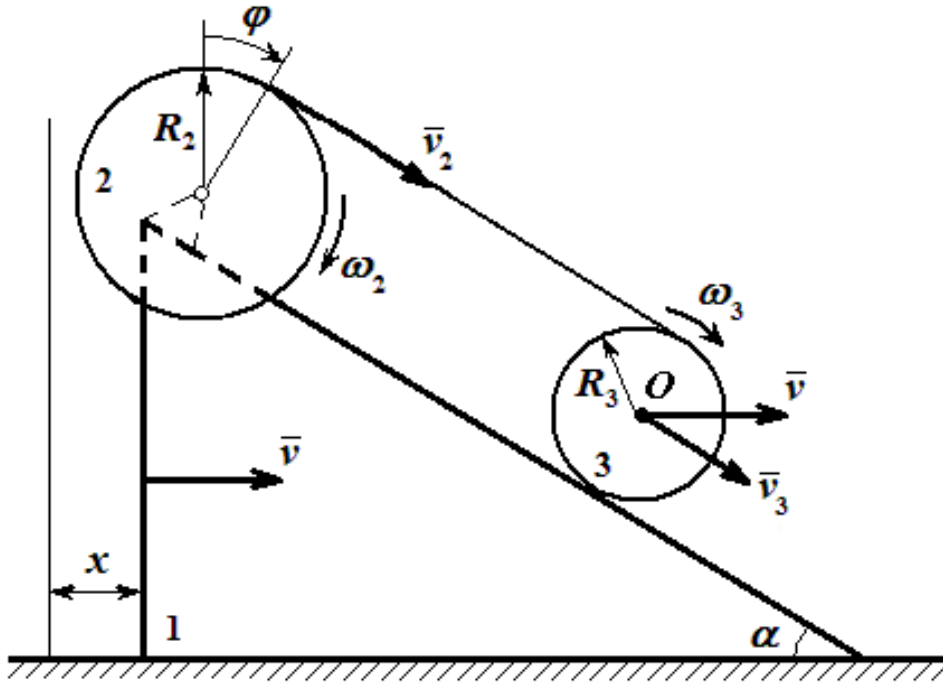


Рис. 3.26

Кинетическая энергия поступательно движущейся призмы 1

$$T_1 = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия блока 2, вращающегося вокруг оси, закрепленной на призме 1, и перемещающегося поступательно вместе с призмой со скоростью $v = \dot{x}$

$$T_2 = \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} + \frac{\frac{m_2 R_2^2}{2} \cdot \dot{\phi}^2}{2} = \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2 \dot{\phi}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия цилиндра 3, скатывающегося по наклонной плоскости призмы 1 и перемещающегося вместе с призмой, зависит от абсолютной скорости цилиндра v_O , равной векторной сумме скорости призмы $v = \dot{x}$ и скорости центра цилиндра 3 при его скатывании: $v_3 = \omega_3 R_3 = \frac{v_2}{2} = \frac{\omega_2 R_2}{2} = \frac{\dot{\phi} \cdot R_2}{2}$.

Модуль скорости v_O определяется следующим образом:

$$v_O = \sqrt{v^2 + v_3^2 + 2 \cdot v \cdot v_3 \cdot \cos(\bar{v}, \bar{v}_3)} = \sqrt{\dot{x}^2 + \left(\frac{\dot{\phi} \cdot R_2}{2}\right)^2 + 2 \dot{x} \cdot \frac{\dot{\phi} \cdot R_2}{2} \cos \alpha}.$$

Тогда кинетическая энергия цилиндра 3

$$T_3 = \frac{m_3 v_0^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3}{2} \left(\dot{x}^2 + \left(\frac{\dot{\phi} \cdot R_2}{2} \right)^2 + 2 \dot{x} \frac{\dot{\phi} \cdot R_2}{2} \cos \alpha \right) + \frac{\frac{m_3 R_3^2}{2} \cdot \left(\frac{\dot{\phi} \cdot R_2}{2 R_3} \right)^2}{2} =$$

$$= \frac{m_3 \dot{x}^2}{2} + \frac{3m_3}{16} \dot{\phi}^2 R_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x} \cdot \dot{\phi} \cdot R_2 \cos \alpha.$$

Полная кинетическая энергия механической системы

$$T = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2 \dot{\phi}^2}{4} + \frac{m_3 \dot{x}^2}{2} + \frac{3m_3}{16} \dot{\phi}^2 R_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x} \cdot \dot{\phi} \cdot R_2 \cos \alpha =$$

$$= \frac{\dot{x}^2}{2} (m_1 + m_2 + m_3) + \frac{\dot{\phi}^2 R_2^2}{2} \left(\frac{4m_2 + 3m_3}{8} \right) + \frac{m_3}{2} \dot{x} \cdot \dot{\phi} \cdot R_2 \cos \alpha.$$

Найдем частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам и обобщенным скоростям:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0,$$

т.к. в данном примере кинетическая энергия системы не зависит от обобщенных координат.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x}(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{m_3}{2} \dot{\phi} \cdot R_2 \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \cdot R_2^2 \left(\frac{4m_2 + 3m_3}{8} \right) + \frac{m_3}{2} \dot{x} \cdot R_2 \cos \alpha.$$

Производные по времени от последних выражений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x}(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{m_3}{2} \ddot{\phi} \cdot R_2 \cos \alpha;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = \ddot{\phi} \cdot R_2^2 \left(\frac{4m_2 + 3m_3}{8} \right) + \frac{m_3}{2} \ddot{x} \cdot R_2 \cos \alpha.$$

Определим обобщенные силы. По формуле (3.13) для данной задачи можно записать

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x}; \quad Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta \varphi}.$$

Внешними силами являются силы тяжести; связи – идеальные, т.к. реакции опор работу не совершают. Зададим координате x приращение δx , оставив неизменяемым угол φ . Работа сил тяжести $\delta A_x = \sum G_k \cdot \delta x \cdot \cos 90^\circ = 0$, т.к. силы тяжести перпендикулярны направлениям перемещений тел системы при изменении координаты x . Следовательно, $Q_x = 0$.

Теперь зададим приращение $\delta \varphi$ углу φ , оставив без изменения координату x . Работу при таком перемещении совершит только сила тяжести цилиндра 3, т.к. точки приложения сил тяжести призмы и блока не перемещаются.

$$\delta A_\varphi = m_3 g \cdot \delta s_{O_3} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = m_3 g \frac{\delta \varphi \cdot R_2}{2} \sin \alpha;$$

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta \varphi} = \frac{m_3}{2} g \cdot R_2 \sin \alpha.$$

Все полученные величины подставляем в уравнения Лагранжа второго рода:

$$\ddot{x}(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{m_3}{2} \ddot{\varphi} \cdot R_2 \cos \alpha - 0 = 0;$$

$$\ddot{\varphi} \cdot R_2^2 \left(\frac{4m_2 + 3m_3}{8} \right) + \frac{m_3}{2} \ddot{x} \cdot R_2 \cos \alpha - 0 = \frac{m_3}{2} g \cdot R_2 \sin \alpha.$$

После решения данной системы получим

$$\ddot{x} = - \frac{m_3 R_2 \cos \alpha}{2(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot \ddot{\varphi};$$

$$\ddot{\varphi} \cdot R_2^2 \left(\frac{4m_2 + 3m_3}{8} \right) - \frac{m_3^2 R_2^2 \cos^2 \alpha}{4(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot \ddot{\varphi} = \frac{m_3}{2} g \cdot R_2 \sin \alpha;$$

$$\ddot{\varphi} \cdot R_2^2 \left(\frac{4m_2 + 3m_3}{8} \right) - \ddot{\varphi} \cdot \frac{m_3^2 R_2 \cos^2 \alpha}{4(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{m_3}{2} g \cdot \sin \alpha;$$

$$\ddot{\phi} \cdot \frac{R_2}{8} \left(4m_2 + 3m_3 - \frac{2m_3^2 \cos^2 \alpha}{(m_1 + m_2 + m_3)} \right) = \frac{m_3}{2} g \cdot \sin \alpha ;$$

$$\ddot{\phi} = \frac{4m_3 g \cdot \sin \alpha}{R_2 \left(4m_2 + 3m_3 - \frac{2m_3^2 \cos^2 \alpha}{(m_1 + m_2 + m_3)} \right)} ;$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{m_3 R_2 \cos \alpha}{2(m_1 + m_2 + m_3)} \cdot \frac{4m_3 g \cdot \sin \alpha}{R_2 \left(4m_2 + 3m_3 - \frac{2m_3^2 \cos^2 \alpha}{(m_1 + m_2 + m_3)} \right)} = \\ &= -\frac{m_3^2 \cdot g \cdot \sin 2\alpha}{(4m_2 + 3m_3)(m_1 + m_2 + m_3) - 2m_3^2 \cos^2 \alpha} . \end{aligned}$$

Полученные значения $\ddot{x}$ и $\ddot{\phi}$ – соответственно линейное ускорение призмы 1 и угловое ускорение блока 2.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах // Динамика. – СПб.: Лань, 2010. – Т. 2. – 640 с.
- 2 Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – 10-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 736 с.
- 3 Имаева Э.Ш., Вильданова Н.Г. Учебный терминологический словарь по теоретической механике. – Уфа: УГНТУ, 2002. – 105 с.
- 4 Кинематика: учебно-методическое пособие / Садыков В.А., Давлетов О.Б. – Уфа: РИО РУНМЦ МО РБ, 2012. – 60 с.
- 5 Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. – СПб.: Лань, 2006. – 452 с.
- 6 Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для вузов. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2003. – 719 с.
- 7 Статика. Исследование равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил. Центр тяжести твердого тела: учебно-методическое пособие для практических занятий по теоретической механике / Имаева Э.Ш. – Уфа: УГНТУ, 2007. – 18 с.
- 8 Статика: учебно-методическое пособие / Садыков В.А., Имаева Э.Ш. – Уфа: РИО РУНМЦ МО РБ, 2010. – 48 с.
- 9 Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 1998. – 768 с.