

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уфимский государственный нефтяной технический университет»
Кафедра «Механика и конструирование машин»

КИНЕМАТИКА

*Учебно-методическое пособие
для выполнения контрольных работ
по теоретической механике
для студентов заочной формы обучения*

Уфа
2011

Кинематика. Учебно-методическое пособие для выполнения контрольных работ по теоретической механике для студентов заочной формы обучения. – Уфа: РИО РУНМЦ МО РБ 2011.– 55 с.

Составители:	Садыков В.А., проф., канд. техн. наук Давлетов О.Б., преподаватель
Рецензент	Загорский В.К., проф., докт. техн. наук

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с государственным образовательным стандартом дисциплины «Теоретическая механика», преподаваемой студентам заочной формы обучения в технических вузах. В пособии приведены краткая теория, примеры решения задач. Пособие поможет обучающимся при выполнении контрольных работ, при подготовке к зачетам, экзаменам.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
1 Кинематика точки	3
1.1 Способы задания закона движения точки	3
1.1.1 Векторный способ задания движения точки	3
1.1.2 Координатный способ задания движения точки	4
1.1.3 Естественный способ задания движения точки	6
1.2 Примеры решения задач	8
2 Кинематика твердого тела	12
2.1 Поступательное движение	13
2.2 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	14
2.2.1 Основные формулы для определения параметров вращающегося твердого тела	14
2.2.2 Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела	15
2.2.3 Передаточные механизмы	16
2.2.4 Примеры решения задач	18
2.3 Плоскопараллельное движение твердого тела	21
2.3.1 Определение скоростей точек в плоскопараллельном движении	22
2.3.1.1 Теорема о скоростях точек	22
2.3.1.2 Следствие из теоремы о скоростях точек	22
2.3.1.3 Мгновенный центр скоростей	23
2.3.2 Ускорение точки в плоскопараллельном движении	26
2.3.3 Мгновенный центр ускорений	27
2.3.4 Примеры решения задач	30
3 Сложное движение точки	43
3.1 Определение скоростей и ускорений точек в сложном движении	45
3.2 Примеры определения скоростей и ускорений точек в сложном движении	47
Список использованных источников	55

ВВЕДЕНИЕ

Кинематика – это раздел механики, в котором изучается движение механических систем с геометрической точки зрения, без учета причин (сил), вызывающих это движение и изменение движения. Положение тела, его движение в пространстве может быть определено относительно другого неизменяемого тела. С ним связывают выбранную систему отсчёта – систему координат, в которой и определяют параметры движения.

Установление способов, с помощью которых может быть задано движение точек или тел по отношению к выбранной системе отсчёта, позволит определить кинематические характеристики движения (траектории точек, их скорости, ускорения, угловые параметры тел.) Движение любой механической системы относительно выбранной системы отсчёта будет известно, если известно движение каждой точки этой системы. Поэтому изучение раздела «Кинематика» начинается с темы «Кинематика точки», далее рассматривается тема «Кинематика твёрдого тела».

Данное учебно-методическое пособие поможет студентам заочной формы обучения при выполнении контрольных работ по разделу «Кинематика». В пособии кратко изложена теория, даны основные формулы, приведены примеры решения типовых задач. Краткость изложения теории предполагает предварительное изучение курса по учебникам, в которых даны подробные обоснования определений, выводы, доказательства теорем. Методическое пособие может быть рекомендовано и студентам дневного отделения на практических занятиях и при выполнении расчётно-графических работ.

1 КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Чтобы иметь возможность определить параметры движения точки необходимо задать закон ее движения. В зависимости от известных величин и поставленной задачи могут быть использованы следующие способы задания движения точки.

1.1.1 Векторный способ задания движения точки

В этом случае положение точки на плоскости или в пространстве определяется вектором-функцией

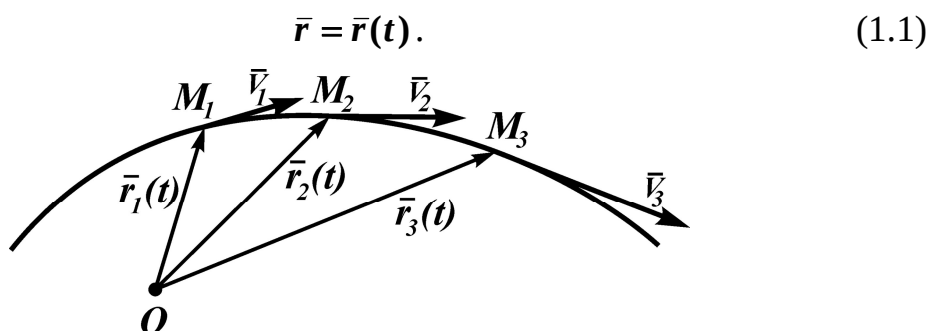
$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1)$$


Рисунок 1.1

Этот вектор откладывается от неподвижной точки, выбранной за начало отсчета, его конец определяет положение движущейся точки. Годограф $\vec{r}$, т.е. положение концов этого вектора в пространстве, определяет траекторию движущейся точки. Ее скорость в этом случае определяется как производная от радиуса-вектора и направлена по касательной к годографу $\vec{r}$ (по касательной к траектории движения точки, рисунок 1.1):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.2)$$

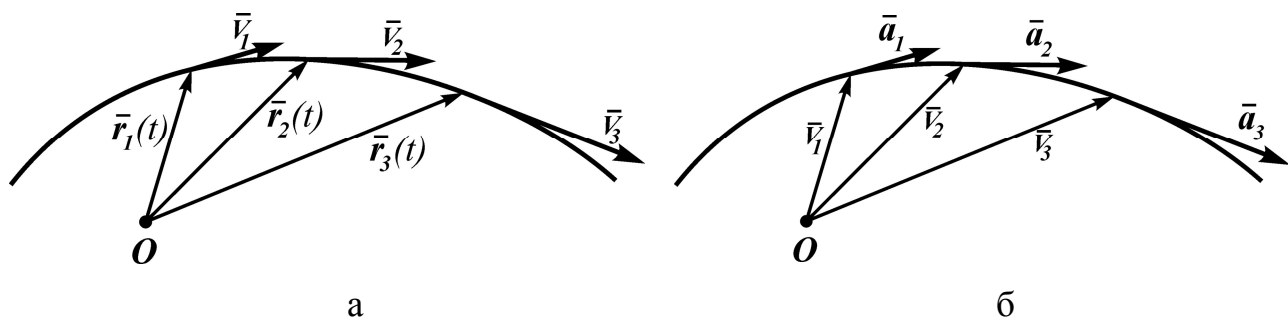


Рисунок 1.2

Ускорение точки (изменение ее скорости) определяется как производная от скорости:

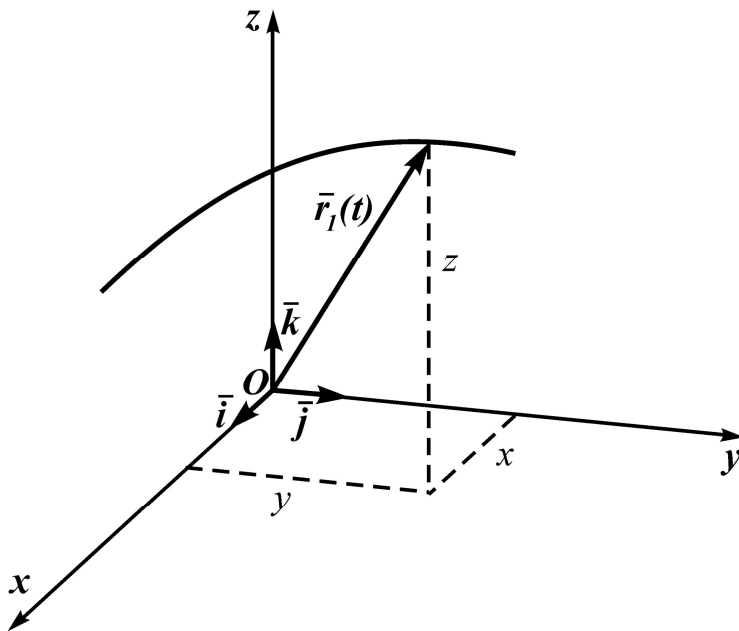
$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (1.3)$$

Вектор ускорения направлен по касательной к годографу вектора скорости (рисунок 1.2, б).

1.1.2 Координатный способ задания движения точки

В выбранной системе координат задаются координаты движущейся точки как функции от времени. В прямоугольной декартовой системе координат это будут уравнения:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$



Эти уравнения являются и уравнениями траектории в параметрической форме. Исключая из этих уравнений параметр t , можно получить три пары систем двух уравнений, каждая из которых представляет траекторию точки, как пересечение поверхностей.

Рисунок 1.3

Кроме декартовых могут быть использованы другие системы координат (сферическая, цилиндрическая). Всегда можно перейти от координатного способа задания движения к векторному (рисунок 1.3):

$$\bar{r}(t) = \bar{i} \cdot x(t) + \bar{j} \cdot y(t) + \bar{k} \cdot z(t). \quad (1.5)$$

Поэтому, используя формулы для определения скорости и ускорения точки при векторном способе задания движения, можно получить аналогичные формулы для координатного способа:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i} \cdot \frac{dx}{dt} + \bar{j} \cdot \frac{dy}{dt} + \bar{k} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

То есть:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ V_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \\ V &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \end{aligned} \right\}. \quad (1.6)$$

Направление вектора скорости определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\hat{\vec{V}} \hat{\vec{i}}) &= \frac{V_x}{V} \\ \cos(\hat{\vec{V}} \hat{\vec{j}}) &= \frac{V_y}{V} \\ \cos(\hat{\vec{V}} \hat{\vec{k}}) &= \frac{V_z}{V} \end{aligned} \right\}. \quad (1.7)$$

Формулы (1.6) и (1.7) полностью определяют вектор скорости при координатном способе задания движения точки, т.е. по величине и направлению.

Аналогичны формулы для определения ускорения точки:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{i} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \bar{j} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \bar{k} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}; \\ a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}; & \cos(\hat{\bar{a}} \hat{\vec{i}}) &= \frac{a_x}{a}; \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y}; & \cos(\hat{\bar{a}} \hat{\vec{j}}) &= \frac{a_y}{a}; \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}; & \cos(\hat{\bar{a}} \hat{\vec{k}}) &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

Формулы (1.8) определяют величину и направление вектора ускорения. В формулах (1.6) и (1.8) приведены используемые в различных учебниках обозначения проекций скоростей и ускорений точек на оси декартовой системы координат.

1.1.3 Естественный способ задания движения точки

При естественном способе задания движения предполагается определение параметров движения точки в подвижной системе отсчета, начало которой совпадает с движущейся точкой, а осями служат касательная, нормаль и бинормаль к траектории движения точки в каждом ее положении.

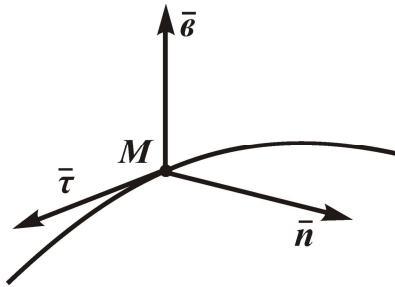


Рисунок 1.4

На рисунке 1.4:

$\bar{\tau}$ – орт касательной;

$\bar{n}$ – орт нормали;

$\bar{b}$ – орт бинормали;

Единичные орты $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ определяют направление соответствующих осей в каждой точке кривой.

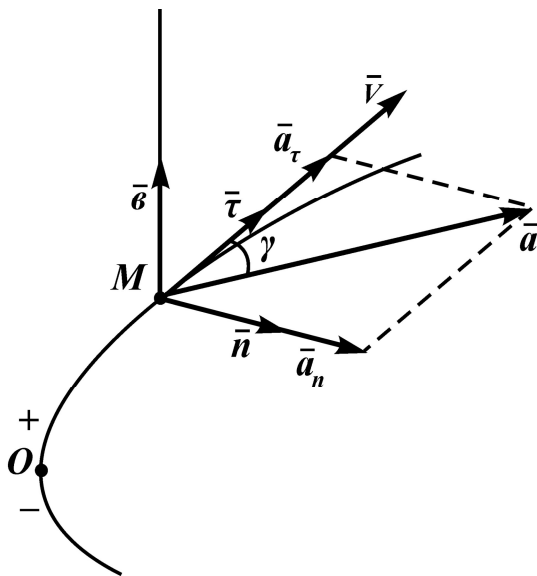


Рисунок 1.5

Чтобы задать закон движения точки естественным способом необходимо:

- 1) знать траекторию движения;
- 2) установить начало отсчета на этой кривой;
- 3) установить положительное направление движения;
- 4) дать закон движения точки по этой кривой, т.е. выразить расстояние от начала отсчета до положения точки на кривой в данный момент времени $\cup OM = S(t)$.

Зная эти параметры можно найти все кинематические характеристики точки в любой момент времени (рисунок 1.5).

Скорость точки определяется по формулам (1.9)

$$\bar{V} = \bar{\tau} \frac{dS}{dt}, \quad V = \frac{dS}{dt}. \quad (1.9)$$

Первая формула определяет величину и направление вектора скорости, вторая формула только величину.

Ускорение определяется как производная от вектора скорости:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\bar{\tau} \frac{dS}{dt} \right) = \bar{\tau} \frac{d^2 S}{dt^2} + \frac{d\bar{\tau}}{dt} \frac{dS}{dt} = \bar{\tau} \frac{d^2 S}{dt^2} + \left(\frac{d\bar{\tau}}{dS} \frac{dS}{dt} \right) \frac{dS}{dt} = \\ &= \bar{\tau} \frac{dV}{dt} + \bar{n} \frac{1}{\rho} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = \bar{\tau} \cdot a_\tau + \bar{n} \frac{V^2}{\rho} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n,\end{aligned}$$

т.е. $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$ (1.10)

В формуле (1.10)

$\bar{a}_\tau = \bar{\tau} \frac{dV}{dt} = \bar{\tau} \frac{d^2 S}{dt^2}, \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}$ – касательное ускорение; оно характеризует быстроту изменения величины скорости точки;

$\bar{a}_n = \bar{n} \frac{V^2}{\rho}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}$ – нормальное ускорение точки; характеризует быстроту изменения направления вектора скорости;

ρ – радиус кривизны траектории в данной точке (например, для окружности: $\rho = R$, для прямой линии $\rho = \infty$).

Полное ускорение точки определяется следующим образом (рисунок 1.5):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Выше отмечалось, что всегда можно перейти от одного способа задания закона движения точки к другому. Поэтому, преобразовывая одни и те же формулы, можно получить другое их написание.

Например, $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{V_x^2 + V_y^2}) = \left| \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V} \right|$

или $a_\tau = a \cos \gamma$ (рисунок 1.5).

Далее

$$a_\tau = a \cos \gamma \cdot \frac{V}{V} = \frac{aV \cos \gamma}{V} = \left| \frac{\bar{a} \cdot \bar{V}}{V} \right| = \left| \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V} \right|, \quad (1.11)$$

$$a_n = a \sin \gamma = \frac{aV \sin \gamma}{V} = \left| \frac{\bar{a} \times \bar{V}}{V} \right| = \left| \frac{a_x V_y - a_y V_x}{V} \right|. \quad (1.12)$$

1.2 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1

Движение точки задано векторным способом: $\vec{r} = \vec{i} \cdot 2t + \vec{j} \cdot 4$, где $\vec{r}$ задано в метрах. Определить параметры движения.

Решение

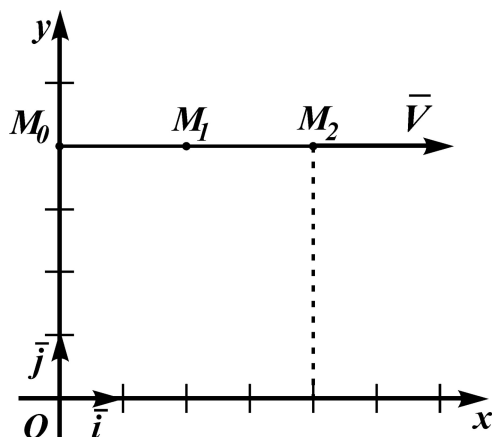


Рисунок 1.6

Можно представить движение данной точки в декартовых координатах: по оси Ox точка движется равномерно, по оси Oy движение отсутствует.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \cdot 2 + \vec{j} \cdot 0;$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 0.$$

То есть траекторией точки является прямая линия, параллельная оси Ox ; точка M движется по ней с постоянной скоростью 2 м/с . На рисунке 1.6 показано положение точки в момент времени 2 с .

Пример 2

Даны уравнения движения точки M :

$$x = 3 \cos \frac{2}{3} \pi t + 3 \quad \text{см};$$

$$y = 2 \sin \frac{2}{3} \pi t - 2 \quad \text{см}.$$

Определить вид траектории и в момент времени $t = 1 \text{ с}$ найти скорость точки, полное, касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории в данной точке.

Решение

Координатный способ задания движения – это траектория движения точки в параметрической форме.

Исключим параметр t :

$$\cos \frac{2}{3} \pi t = \frac{x-3}{3}, \quad \sin \frac{2}{3} \pi t = \frac{y+2}{2},$$

$$\left(\cos \frac{2}{3} \pi t\right)^2 + \left(\sin \frac{2}{3} \pi t\right)^2 = 1 = \frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2}, \quad \frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1,$$

получили эллипс с полуосями 3 см и 2 см (рисунок 1.7).

В момент времени $t = 1 \text{ с}$ координаты точки:

$$x = 3 \cos \frac{2}{3} \pi \cdot 1 + 3 = 3 \cos 120^\circ + 3 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 1,5 \text{ см};$$

$$y = 2 \sin \frac{2}{3} \pi \cdot 1 - 2 = 2 \sin 120^\circ - 2 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 = -0,27 \text{ см}.$$

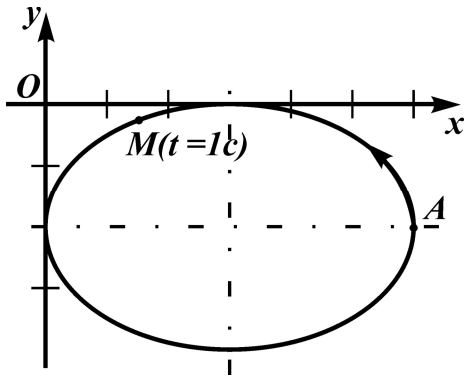


Рисунок 1.7

Движение начинается из точки A :

$$x_{t=0} = 3 \cos \frac{2}{3} \pi \cdot 0 + 3 = 3 + 3 = 6 \text{ см};$$

$$y_{t=0} = 2 \sin \frac{2}{3} \pi \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2 \text{ см}.$$

Учитывая графики изменения функций синуса и косинуса, можно утверждать, что точка M движется по эллипсу из точки A против хода часовой стрелки.

Скорость точки:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(3 \cos \frac{2}{3} \pi t + 3 \right) = 3 \cdot \left(-\sin \frac{2}{3} \pi t \right) \cdot \frac{2}{3} \pi + 0 = -2\pi \sin \frac{2}{3} \pi t \text{ см/с};$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(2 \sin \frac{2}{3} \pi t - 2 \right) = 2 \cdot \left(\cos \frac{2}{3} \pi t \right) \cdot \frac{2}{3} \pi - 0 = \frac{4}{3} \pi \cos \frac{2}{3} \pi t \text{ см/с}.$$

В момент времени $t=1$:

$$V_x = -2\pi \sin \frac{2}{3} \pi \cdot 1 = -2\pi \sin 120^\circ = -2 \cdot 3,14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -5,44 \text{ см/с};$$

$$V_y = \frac{4}{3} \pi \cos \frac{2}{3} \pi \cdot 1 = \frac{4}{3} \pi \cos 120^\circ = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2,09 \text{ см/с};$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-5,44)^2 + (-2,09)^2} = 5,83 \text{ см/с}.$$

Направление вектора скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\vec{V} \hat{i}) = \frac{V_x}{V} = \frac{-5,44}{5,83} = -0,93, \quad \alpha = 201^\circ 30';$$

$$\cos(\vec{V} \hat{j}) = \frac{V_y}{V} = \frac{-2,09}{5,83} = -0,36, \quad \beta = 111^\circ 30'.$$

Таким образом, вектор скорости определен и по величине и по направлению (рисунок 1.8).

Ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-2\pi \sin \frac{2}{3}\pi t \right) = -\frac{4}{3}\pi^2 \cos \frac{2}{3}\pi t \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3}\pi \cos \frac{2}{3}\pi t \right) = -\frac{8}{9}\pi^2 \sin \frac{2}{3}\pi t \text{ см/с}^2.$$

Для $t = 1 \text{ с}$: $a_x = -\frac{4}{3}\pi^2 \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{4}{3} \cdot 3,14^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6,57 \text{ см/с}^2;$

$$a_y = -\frac{8}{9}\pi^2 \sin \frac{2}{3}\pi = -\frac{8}{9} \cdot 3,14^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -7,59 \text{ см/с}^2.$$

Полное ускорение: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(6,57)^2 + (-7,59)^2} = 10,04 \text{ см/с}^2.$

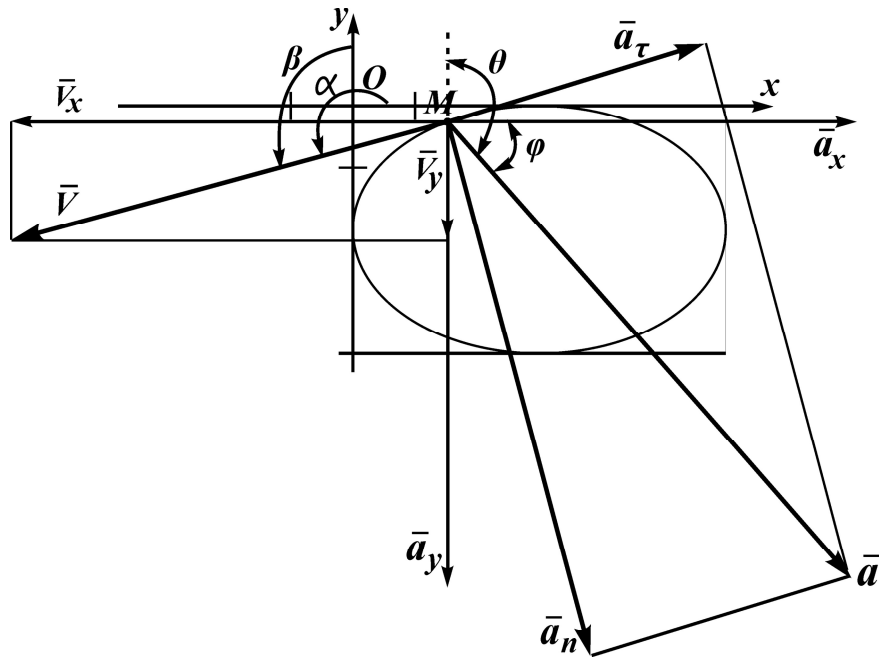


Рисунок 1.8

Направление вектора ускорения:

$$\cos \left(\hat{\vec{a}} \hat{\vec{i}} \right) = \frac{a_x}{a} = \frac{6,57}{10,04} = 0,65, \quad \varphi = \arccos 0,65 = 49^\circ 30';$$

$$\cos \left(\hat{\vec{a}} \hat{\vec{j}} \right) = \frac{a_y}{a} = \frac{-7,59}{10,04} = -0,76, \quad \theta = \arccos(-0,76) = 139^\circ 30'.$$

Результаты расчетов показаны на рисунке 1.8.

Касательное ускорение определяется по формуле (1.11):

$$a_{\tau} = \left| \frac{a_x V_x + a_y V_y}{V} \right| = \left| \frac{6,57 \cdot (-5,44) + (-7,59) \cdot (-2,09)}{5,83} \right| = \left| \frac{-19,88}{5,83} \right| = 3,41 \text{ см/с}^2.$$

Нормальное ускорение можно определить либо из формулы (1.5), либо из формулы (1.12). По формуле (1.12) получим:

$$a_n = \left| \frac{a_x V_y - a_y V_x}{V} \right| = \left| \frac{6,57 \cdot (-2,09) - (-7,59) \cdot (-5,44)}{5,83} \right| = \left| \frac{-55,02}{5,83} \right| = 9,44 \text{ см/с}^2.$$

Результат может быть проверен (см. выше расчет $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$):

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{3,41^2 + 9,44^2} = 10,04 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории в точке M : $\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{5,83^2}{9,44} = 3,60 \text{ см}.$

Результаты всех расчетов могут быть сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты расчетов

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
x	y	V_x	V_y	V	a_x	a_y	a_{τ}	a_n	a	ρ
1,5	-0,27	-5,44	-2,09	5,83	6,57	7,59	3,41	9,44	10,04	3,60

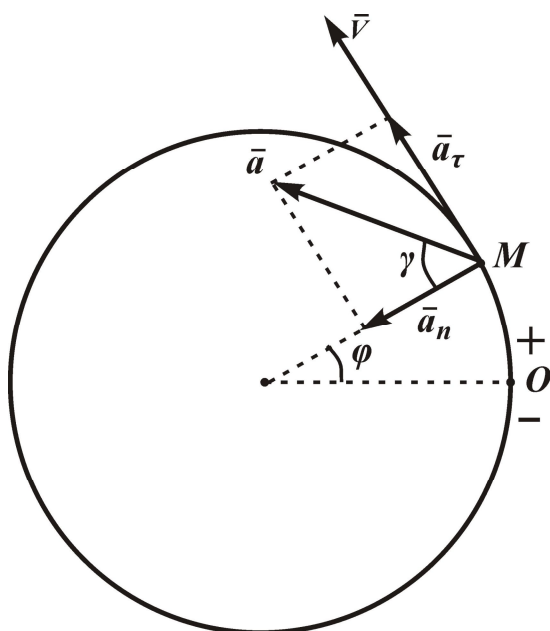


Рисунок 1.9

Пример 3

Точка движется по окружности радиуса R по закону: $S = 2\pi R t^2$, м. В момент времени $t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ с определить угол между вектором ускорения и радиусом.

Решение

Движение точки задано естественным способом: известна траектория (окружность) и закон движения точки по этой траектории.

Выбрав начало отсчета и положительное направление движения, показываем положение точки в заданный момент времени:

$$S = 2\pi R \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 = \frac{1}{2} R.$$

При длине дуги $\frac{1}{2} R$ центральный угол $\varphi = \frac{S}{R} = \frac{1}{2} \text{ рад}$.

Скорость точки

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi R t^2) = 4\pi R t, \quad t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad V = 2R\sqrt{\pi} = 3,54 \cdot R \text{ м/с}.$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения, в сторону возрастания дуговой координаты. Ускорение определяется по формуле (1.10):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(4\pi R t) = 4\pi R = 12,56 \cdot R \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(2R\sqrt{\pi})^2}{R} = \frac{4R^2\pi}{R} = 4\pi R = 12,56 \cdot R \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(12,56 \cdot R)^2 + (12,56 \cdot R)^2} = 17,76 \cdot R \text{ м/с}^2.$$

Угол между вектором ускорения и радиусом :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{4\pi R}{4\pi R} = 1, \quad \gamma = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ.$$

2 КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

В кинематике твердого тела определяются: закон движения и кинематические характеристики тела, а также кинематические характеристики точек тела.

В данном методическом пособии рассмотрены следующие виды движения твердого тела:

- поступательное;
- вращательное;
- плоскопараллельное.

2.1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, связанная с телом, перемещается параллельно самой себе.

На рисунках 2.1,а и 2.1,б приведены примеры поступательного движения: движение прямоугольника в плоскости чертежа, движение каждой кабины колеса обозрения.

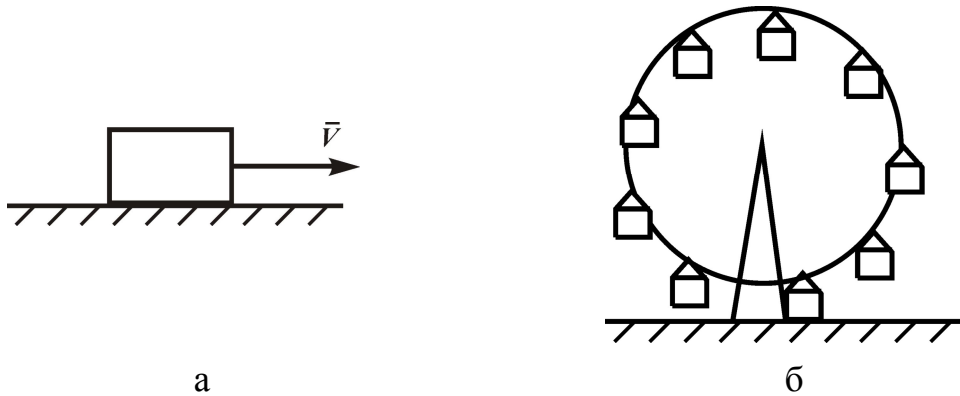


Рисунок 2.1

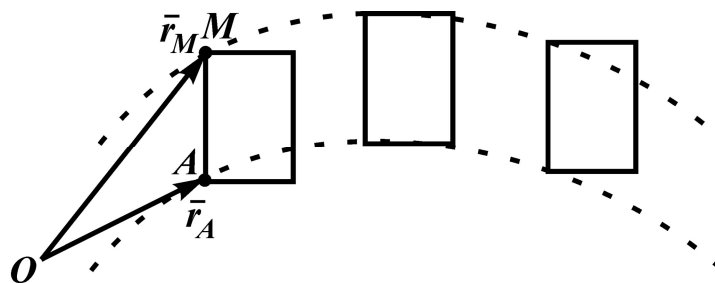


Рисунок 2.2

Исходя из определения поступательного движения, движение твердого тела может быть задано в векторном виде формулой (рисунок 2.2):

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overline{AM}.$$

В этой формуле $\overline{AM}$ – вектор постоянный по величине и направлению, поэтому производная от него равна нулю. Для скорости и ускорения произвольной точки M получим:

$$\overline{V}_M = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AM}}{dt} = \vec{V}_A + \vec{0} = \vec{V}_A, \quad \vec{a}_M = \frac{d\overline{V}_M}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{a}_A. \quad (2.1)$$

То есть скорости и ускорения точек твердого тела при поступательном движении равны и одинаково направлены, а траектории при наложении совпадают. Для определения кинематических характеристик точек тела достаточно знать закон движения одной из них.

2.2 ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси называют движение, при котором хотя бы две точки тела все время остаются неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения.

2.2.1 Основные формулы для определения параметров вращающегося твердого тела

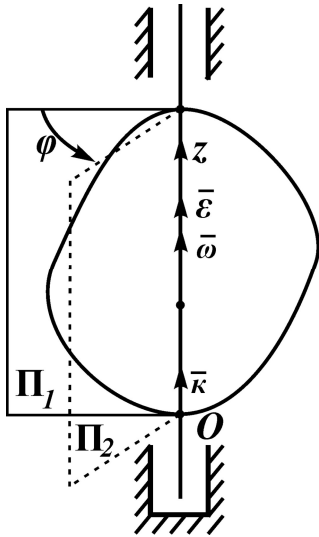


Рисунок 2.3

Вращательное движение определяется двугранным углом φ между двумя плоскостями, проходящими через ось вращения. Одна из этих плоскостей неподвижна, вторая скреплена с твердым телом и поворачивается вместе с ним (рисунок 2.3). Изменение этого угла с течением времени и есть закон вращательного движения:

$$\varphi = \varphi(t), \text{ рад.} \quad (2.2)$$

Положительным считается угол, откладываемый против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу выбранному направлению оси вращения (ось Oz на рисунке 2.3). Угол измеряется в радианах.

Быстрота изменения угла φ – это угловая скорость:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \text{ рад/с; с}^{-1}. \quad (2.3)$$

Приняв $\bar{k}$ как единичный орт положительного направления оси, получим $\bar{\omega} = \bar{k} \dot{\varphi} = \bar{k} \frac{d\varphi}{dt}$. Вектор угловой скорости – скользящий вектор: он может быть приложен к любой точке оси вращения и всегда направлен вдоль оси, при положительном значении угловой скорости направления $\bar{\omega}$ и $\bar{k}$ совпадают, при отрицательном – противоположны.

Изменение угловой скорости характеризуется угловым ускорением:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}, \text{ рад/с}^2; \text{ с}^{-2}; \quad \bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (2.4)$$

Вектор углового ускорения, как и вектор угловой скорости, направлен по оси вращения. При ускоренном вращении их направления совпадают, при замедленном – противоположны.

Для некоторых частных случаев вращательного движения могут быть использованы формулы:

- равномерное вращение ($\omega - \text{const}$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t; \quad (2.5)$$

- равнопеременное вращение ($\varepsilon - \text{const}$)

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.6)$$

В технике угловая скорость часто задается в оборотах в минуту n [об/мин]. Один оборот – это 2π радиан:

$$\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с}; \text{ с}^{-1}.$$

2.2.2 Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

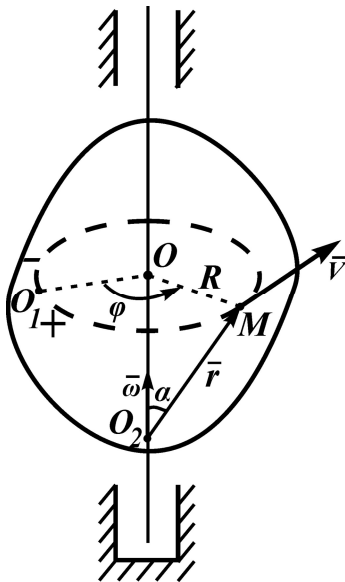


Рисунок 2.4

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси каждая точка тела движется по окружности. Радиус окружности R равен расстоянию от точки до оси вращения. Закон движения точки может быть задан естественным способом (рисунок 2.4): траектория – окружность; начало отсчета точка O_1 и положительное направление движения выбраны, длина дуги (дуговая координата) определяется по формуле

$$S(t) = \cup O_1 M = \varphi \cdot R. \quad (2.8)$$

Скорость точки

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot R = \omega R. \quad (2.9)$$

Скорость направлена по касательной к траектории, поэтому можно написать

$$\bar{V} = \bar{\tau} \cdot V.$$

Вектор скорости можно получить векторным произведением:

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad V = \omega \cdot r \sin \alpha = \omega R.$$

Ускорение при естественном способе задания движения определяется как сумма касательного и нормального ускорений (см. вывод формулы (1.10)):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \quad \bar{a}_\tau = \bar{\tau} \frac{dV}{dt}, \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \varepsilon R,$$

$$\bar{a}_n = \bar{n} \frac{V^2}{\rho}, \quad a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \quad (2.11)$$

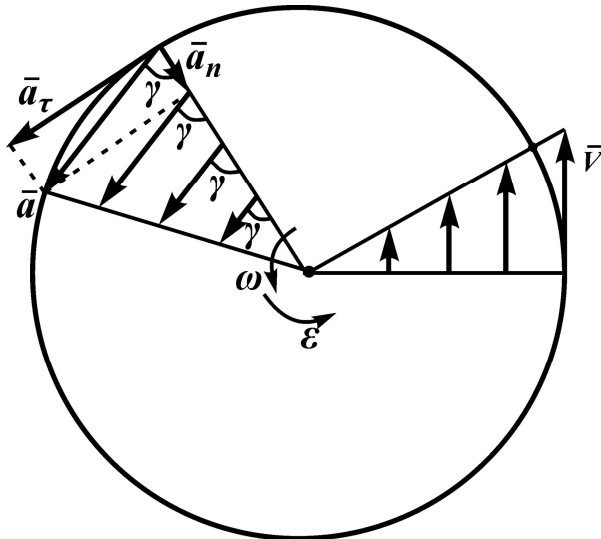


Рисунок 2.5

Эти же выражения можно получить, взяв производную от векторного произведения $\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$.

Угол, который составляет полное ускорение с радиусом, может быть определен из соотношения (рисунок 2.5)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

То есть эти углы для всех точек тела одинаковы и не зависят от их расположения на теле. На этом же рисунке представлены законы распределения скоростей и ускорений точек во вращающемся теле в зависимости от расстояния их до оси вращения. Эти законы распределения соответствуют формулам:

$$V = \omega R; \quad a = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

2.2.3 Передаточные механизмы

Передаточные механизмы передают движение от одного тела к другому. Параметры движения тел определяются с учетом параметров точек соприкосновения (зацепления) этих тел. На рисунке 2.6 (а, б, в, г) приведены различные схемы передачи движения от одного тела к другому.

На рисунках 2.6,а и 2.6,б зависимости угловых скоростей колес определяются из соотношения $V_C = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$, т.е.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.12)$$

На рисунке 2.6,а (внешнее зацепление) колёса вращаются в противоположные стороны, на рисунке 2.6,б (внутреннее зацепление) колеса вращаются в одну сторону. На рисунке 2.6,в показана цепная (ременная) передача. Скорости точек **A** и **B** цепи должны быть равны соответственно скоростям точек **A** и **B**, принадлежащих шкивам:

$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = V_B = \omega_2 \cdot r_2, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

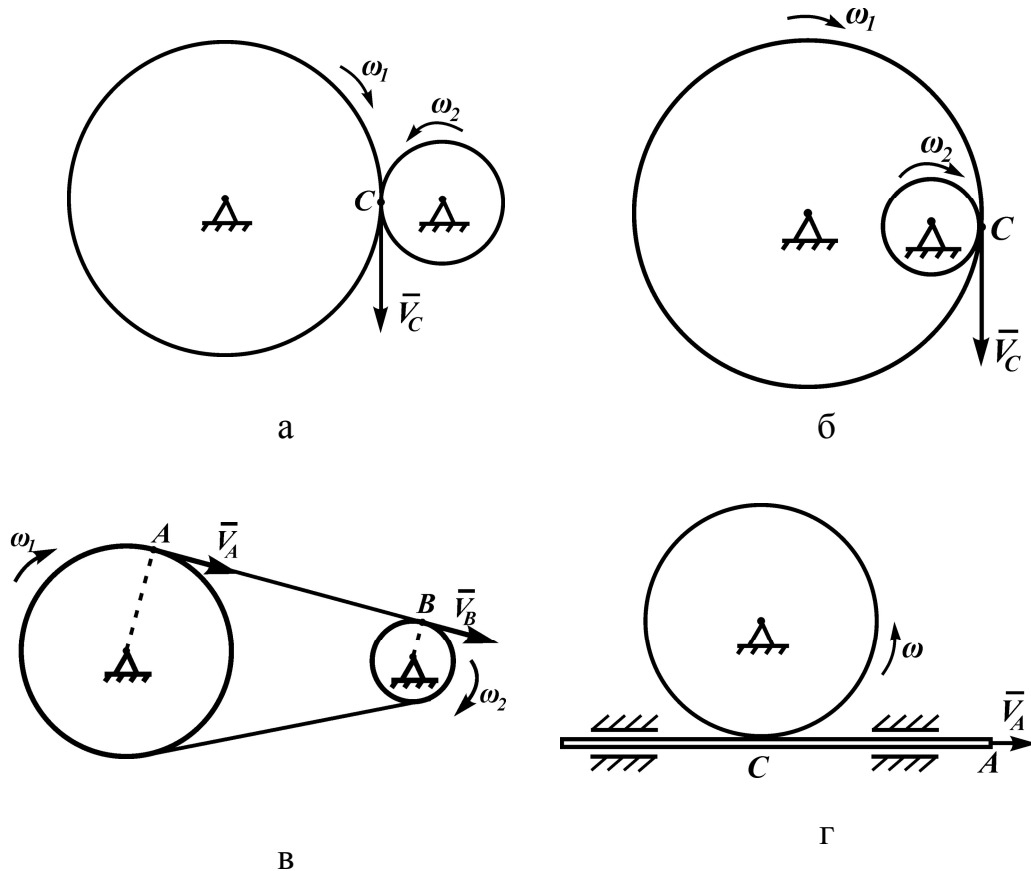


Рисунок 2.6

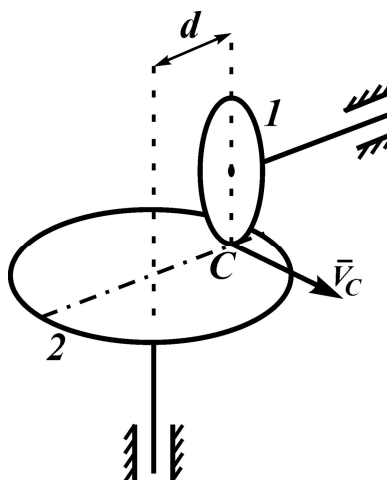


Рисунок 2.7

На рисунке 2.6,г поступательное движение стержня обеспечивает вращение колеса:

$$V_A = V_C = \omega \cdot r, \quad \omega = \frac{V_A}{r}.$$

На рисунке 2.7 изображена фрикционная передача: колесо 1, прижимаясь к торцу колеса 2 в точке **C**, обеспечивает его вращение вокруг вертикальной оси.

$$V_C = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot d, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d}{r_1}.$$

2.2.4 Примеры решения задач

Пример 1

Диск радиуса $R = 0,5 \text{ м}$ вращается по закону $\varphi = \frac{1}{6} \pi t^3$, рад. В момент времени $t = 2 \text{ с}$ определить скорость точки M , лежащей на ободе диска, её ускорение и угол между вектором ускорения и радиусом диска.

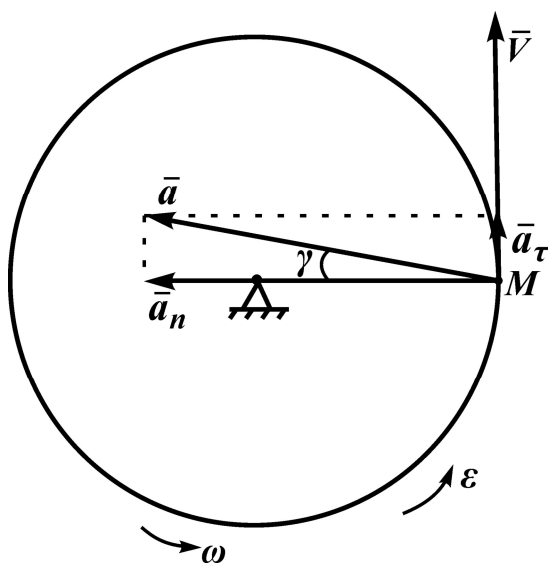


Рисунок 2.8

Решение

При заданном законе вращения угловая скорость и угловое ускорение определяются по формулам (2.3) и (2.4)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \pi t^2 \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \pi t \text{ с}^{-2}.$$

Для момента времени $t = 2 \text{ с}$:

$$\omega = \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 2\pi = 6,28 \text{ с}^{-1};$$

$$\varepsilon = \pi \cdot 2 = 6,28 \text{ с}^{-2}.$$

Скорость точки M : $V = \omega \cdot R = 6,28 \cdot 0,5 = 3,14 \text{ м/с}$.

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения точки, т.е. по касательной к окружности (рисунок 2.8).

Ускорение точки M : $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$, $a_\tau = \varepsilon \cdot R = 6,28 \cdot 0,5 = 3,14 \text{ м/с}^2$;

$$a_n = \omega^2 \cdot R = 6,28^2 \cdot 0,5 = 19,72 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{19,72^2 + 3,14^2} = 19,97 \text{ м/с}^2.$$

Касательное и нормальное ускорения направлены соответственно по касательной и по нормали (рисунок 2.8).

Угол между радиусом и вектором ускорения γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{3,14}{19,72} = 0,16, \quad \gamma \approx 9^\circ.$$

Пример 2

В механизме стрелочного индикатора движение от рейки AB , движущейся в вертикальных направляющих по закону: $x = 2\sin\pi t$ см, передается через шестерни 1, 2, 3, 4, 5 стрелке, скреплённой с шестернёй 5; шестерни 2 и 1, 3 и 4 скреплены между собой. Считая известными радиусы шестерён и длину стрелки l , определить в момент времени $t = \frac{2}{3}$ с скорость и ускорение точки K – конца стрелки ($r_1 = 3$ см, $r_2 = 1,5$ см, $r_3 = 2$ см, $r_4 = 1$ см, $r_5 = 1,5$ см, $l = 4$ см).

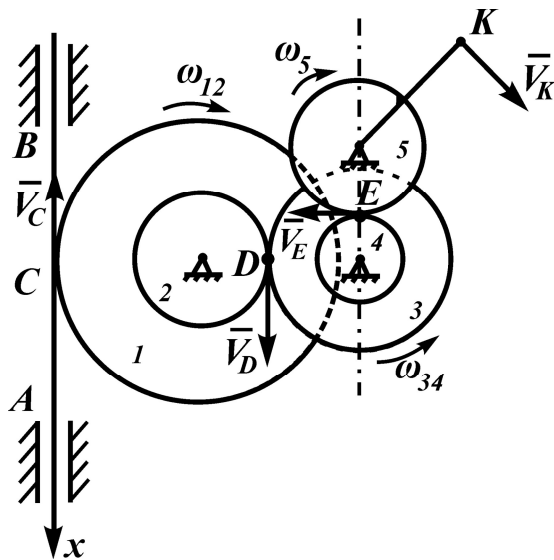


Рисунок 2.9

Решение

В задаче движение от рейки AB передается через систему шестерен стрелке.

При поступательном движении рейки скорости и ускорения всех ее точек равны и одинаково направлены. Поэтому скорость точки C (точки касания рейки и шестерни 1) может быть определена как производная от закона движения рейки:

$$V_C = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos\pi t \text{ см/с.}$$

Угловая скорость скрепленных друг с другом шестерен 1 и 2 определится из формулы

$$V_C = \omega_{12} \cdot r_1, \quad \text{т.е.} \quad \omega_{12} = \frac{V_C}{r_1} = \frac{2\pi \cos\pi t}{r_1} \text{ с}^{-1}.$$

Шестерня 2 находится в зацеплении в точке D с шестерней 3, скрепленной с шестерней 4, поэтому их угловая скорость определяется из соотношения:

$$V_D = \omega_{12} \cdot r_2 = \omega_{34} \cdot r_3, \quad \omega_{34} = \frac{\omega_{12} \cdot r_2}{r_3} = \frac{2\pi \cos\pi t \cdot r_2}{r_1 \cdot r_3} \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость стрелки и скрепленной с ней шестерни 5 определится из формулы для скорости точки E – точки зацепления шестерен 4 и 5

$$V_E = \omega_{34} \cdot r_4 = \omega_5 \cdot r_5, \quad \omega_5 = \frac{\omega_{34} \cdot r_4}{r_5} = \frac{2\pi \cos\pi t \cdot r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3 \cdot r_5} \text{ с}^{-1}.$$

Положительное смещение по оси x стержня AB определяет и положительное направление вращений всех шестерен. В нашей задаче в момент времени $t = \frac{2}{3}c$ скорость точки C равна

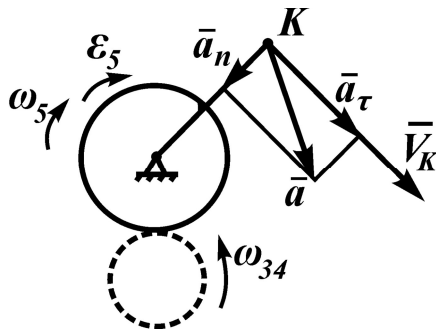
$$V_C = 2\pi \cdot \cos\pi \cdot \frac{2}{3} = 2\pi \cos 120^\circ = 2\pi \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi = -3,14 \text{ см/с}.$$

Соответственно с направлением скорости V_C , противоположной положительному направлению оси x , определяются направления вращения всех шестерен (рисунок 2.9). Для угловой скорости шестерни 5 получим

$$\omega_5 = \frac{2\pi \cos\left(\pi \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 1,5 \cdot 1,0}{3 \cdot 2 \cdot 1,5} = \frac{2\pi \cos 120^\circ \cdot 1,5 \cdot 1,0}{3 \cdot 2 \cdot 1,5} = -0,52 \text{ с}^{-1}.$$

Её угловое ускорение:

$$\varepsilon_5 = \frac{d\omega_5}{dt} = -\frac{2\pi^2 \sin\pi \cdot r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3 \cdot r_5} = -\frac{2 \cdot 3,14^2 \sin\left(\pi \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 1,5 \cdot 1,0}{3 \cdot 2 \cdot 1,5} = -2,84 \text{ с}^{-2}.$$



То есть вращение шестерни 5 и стрелки ускоренное (направления ω_5 и ε_5 совпадают).

Величина скорости точки K (конца стрелки)

$$V_K = \omega_5 \cdot l = 0,52 \cdot 4 = 2,08 \text{ см/с}.$$

Рисунок 2.10

Ускорение точки K определяется по формулам (3.11):

$$a_n = \omega_5^2 \cdot l = 0,52^2 \cdot 4 = 1,08 \text{ см/с}^2;$$

$$a_\tau = \varepsilon_5 \cdot l = 2,84 \cdot 4 = 11,37 \text{ см/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = l \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 4 \cdot \sqrt{2,84^2 + 0,52^4} = 11,4 \text{ см/с}^2.$$

Направление векторов скорости, касательного, нормального и полного ускорения точки K стрелки показано на рисунке 2.10.

2.3 ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным (плоским) движением (ППД) твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях параллельных некоторой неподвижной плоскости (рисунок 2.11). При таком движении точки, лежащие в разных плоскостях на одном отрезке, перпендикулярном неподвижной плоскости (например M_1M_2) совершают одинаковые движения.

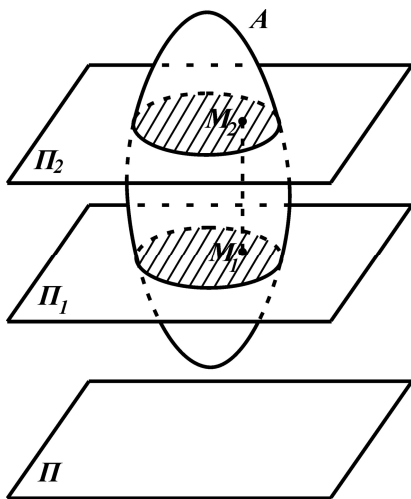


Рисунок 2.11

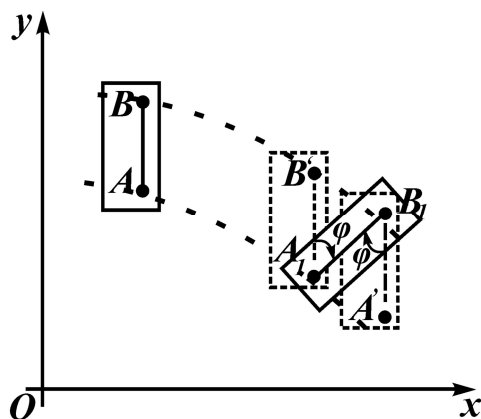


Рисунок 2.12

Отрезок M_1M_2 движется поступательно. Поэтому изучение плоскопараллельного движения сводится к изучению движения плоской фигуры в какой-то плоскости.

На рисунке 2.12 показано перемещение пластинки в плоской системе отсчета xOy из одного положения в другое. Такое перемещение можно осуществить двигая пластину поступательно с траекторией точки A с последующим поворотом на угол φ вокруг точки A_1 . Это же перемещение можно выполнить иначе. Например, перемещая пластинку поступательно с траекторией точки B , с последующим поворотом вокруг B_1 на угол φ . Траектории точек A и B различны, а угол поворота в обоих случаях одинаков. Положение пластинки вполне определяется положением скрепленного с ней отрезка (например AB), закон движения которого можно задать в виде:

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Точка A в этом случае называется полюсом. Если принять за полюс точку B , то получим уравнения:

$$x_B = x_B(t), \quad y_B = y_B(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

За полюс выбирается точка, закон движения которой известен.

2.3.1 Определение скоростей точек в плоскопараллельном движении

2.3.1.1 Теорема о скоростях точек. При движении фигуры в плоскости положение её точек можно определить соотношением (рисунок 2.14):

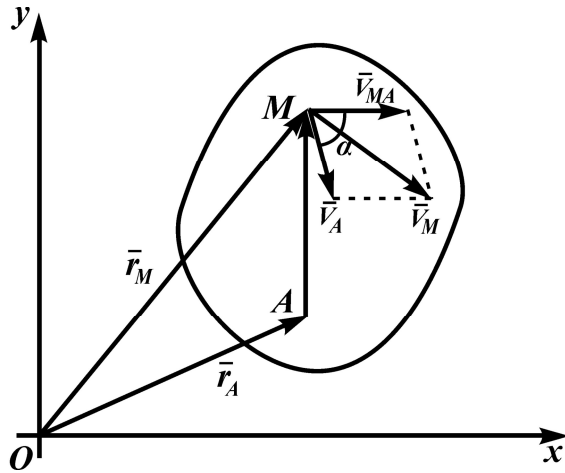


Рисунок 2.14

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \overline{AM}.$$

В данном случае точка A является полюсом. Скорость точки M

$$\bar{V}_M = \frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AM}}{dt}; \quad (2.13)$$

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}.$$

Производная от вектора, постоянного по величине и переменного по направлению, есть вращательная скорость

$$\bar{V}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}, \quad V_{MA} = \omega \cdot AM.$$

Вектор $\bar{\omega}$ в данном случае перпендикулярен плоскости фигуры: $V_{AM} \perp AM$.

Скорость точки в плоскопараллельном движении определяется как геометрическая сумма скорости полюса и скорости точки во вращательном движении фигуры вокруг полюса.

Численная величина скорости может быть найдена по теореме косинусов:

$$V_M^2 = V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A \cdot V_{MA} \cos \alpha \quad (2.13)$$

или проецированием векторного равенства на оси координат:

$$V_{M_x} = V_{A_x} + V_{MA_x}, \quad V_{M_y} = V_{A_y} + V_{MA_y}, \quad V_M = \sqrt{V_{M_x}^2 + V_{M_y}^2}. \quad (2.14)$$

2.3.1.2 Следствие из теоремы о скоростях точек. Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны.

Это положение легко доказывается (рисунок 2.15):

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \quad V_{B_x} = V_{A_x} + V_{BA_x}, \quad \bar{V}_{BA} \perp AB,$$

следовательно, $V_{BA_x} = 0$ и $V_{B_x} = V_{A_x}$.

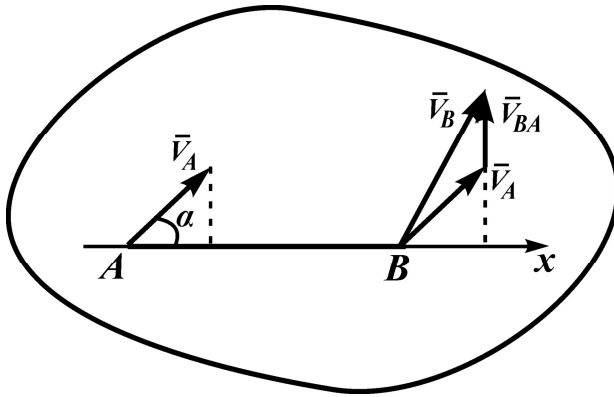


Рисунок 2.15

Это следствие полезно при определении скоростей тех точек, направления скоростей которых известны.

2.3.1.3 Мгновенный центр скоростей. Теорема Эйлера-Шаля доказывает, что любое непоступательное перемещение фигуры в плоскости можно осуществить поворотом вокруг некоторого неподвижного центра. В соответствии с этим легко доказывается, что при плоскопараллельном движении в каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей (МЦС). В учебниках эту точку пишут с индексом V , например P_V , C_V .

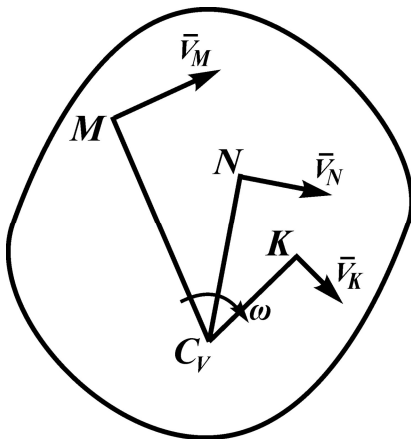


Рисунок 2.16

При определении положения МЦС скорость любой точки может быть записана: $\bar{V}_M = \bar{V}_{C_V} + \bar{V}_{MC_V}$, где точка C_V выбрана за полюс. Поскольку это МЦС и $V_{C_V} = 0$, то скорость любой точки определяется как скорость при вращении вокруг мгновенного центра скоростей:

$$\bar{V}_M = \bar{V}_{C_V} + \bar{V}_{MC_V} = \bar{V}_{MC_V}, \quad V_M = V_{MC_V} = \omega \cdot C_V M,$$

$$\bar{V}_N = \bar{V}_{C_V} + \bar{V}_{NC_V} = \bar{V}_{NC_V}, \quad V_N = V_{NC_V} = \omega \cdot C_V N,$$

$$\bar{V}_K = \bar{V}_{C_V} + \bar{V}_{KC_V} = \bar{V}_{KC_V}, \quad V_K = V_{KC_V} = \omega \cdot C_V K.$$

Из рисунка 2.16 видно, что МЦС лежит в точке пересечения перпендикуляров, проведённых к скоростям точек, при этом всегда справедливо соотношение:

$$\frac{V_M}{C_V M} = \frac{V_N}{C_V N} = \frac{V_K}{C_V K} = \omega.$$

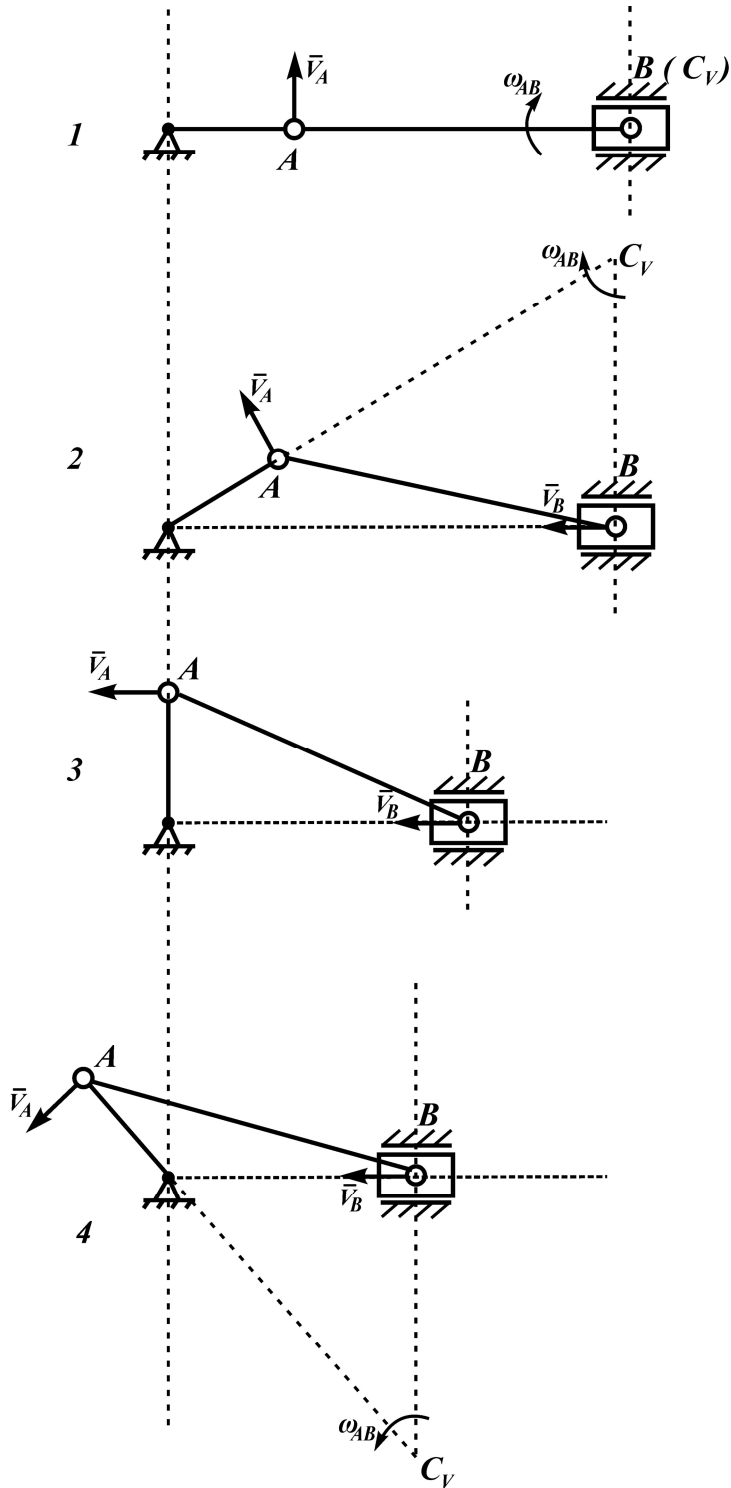


Рисунок 2.17

На рисунке 2.17 показаны примеры определения положения МЦС детали кривошипно-шатунного механизма и приведены формулы для расчета скоростей точек.

1) C_V совпадает с точкой B $V_B = 0$. Шатун AB вращается вокруг точки B ,

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_A}{AB};$$

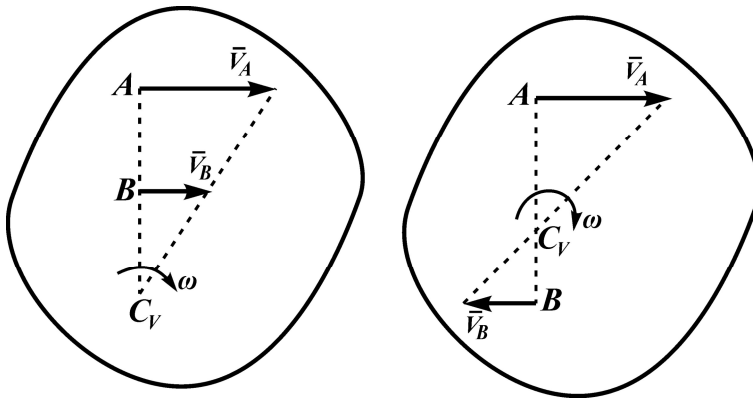
$$2) \frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega_{AB};$$

3) МЦС лежит в «бесконечности»:

$$\frac{V_A}{\infty} = \frac{V_B}{\infty} = \omega_{AB} = 0, \\ V_B = V_A;$$

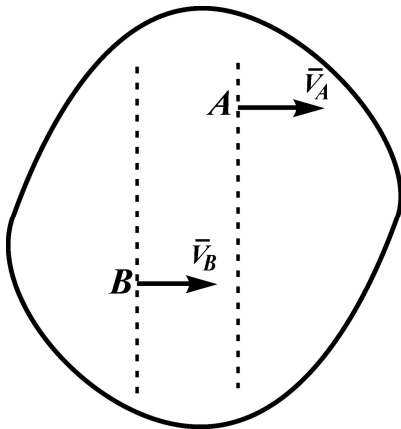
$$4) \frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega_{AB}.$$

На рисунках 2.18–2.21 приведены примеры определения положения МЦС.



$$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega$$

Рисунок 2.18

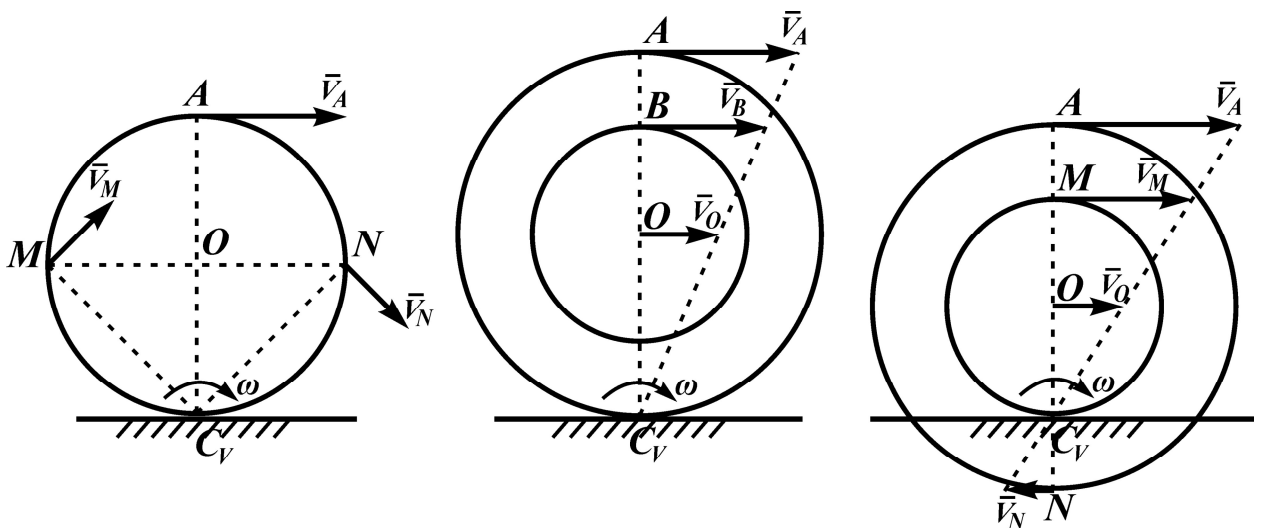


$$V_B \parallel V_A.$$

В этом случае МЦС находится в «бесконечности», т.е.

$$\omega = \frac{V_A}{\infty} = \frac{V_B}{\infty} = 0, \quad V_B = V_A$$

Рисунок 2.19



$$\frac{V_A}{2R} = \frac{V_0}{R} = \frac{V_M}{R\sqrt{2}} = \omega,$$

$$\frac{V_A}{2R} = \frac{V_0}{R} = \frac{V_B}{R+r} = \omega,$$

$$\frac{V_A}{R+r} = \frac{V_0}{r} = \frac{V_N}{R-r} = \omega$$

Рисунок 2.20

Формулы справедливы при отсутствии проскальзывания в точке C_V .

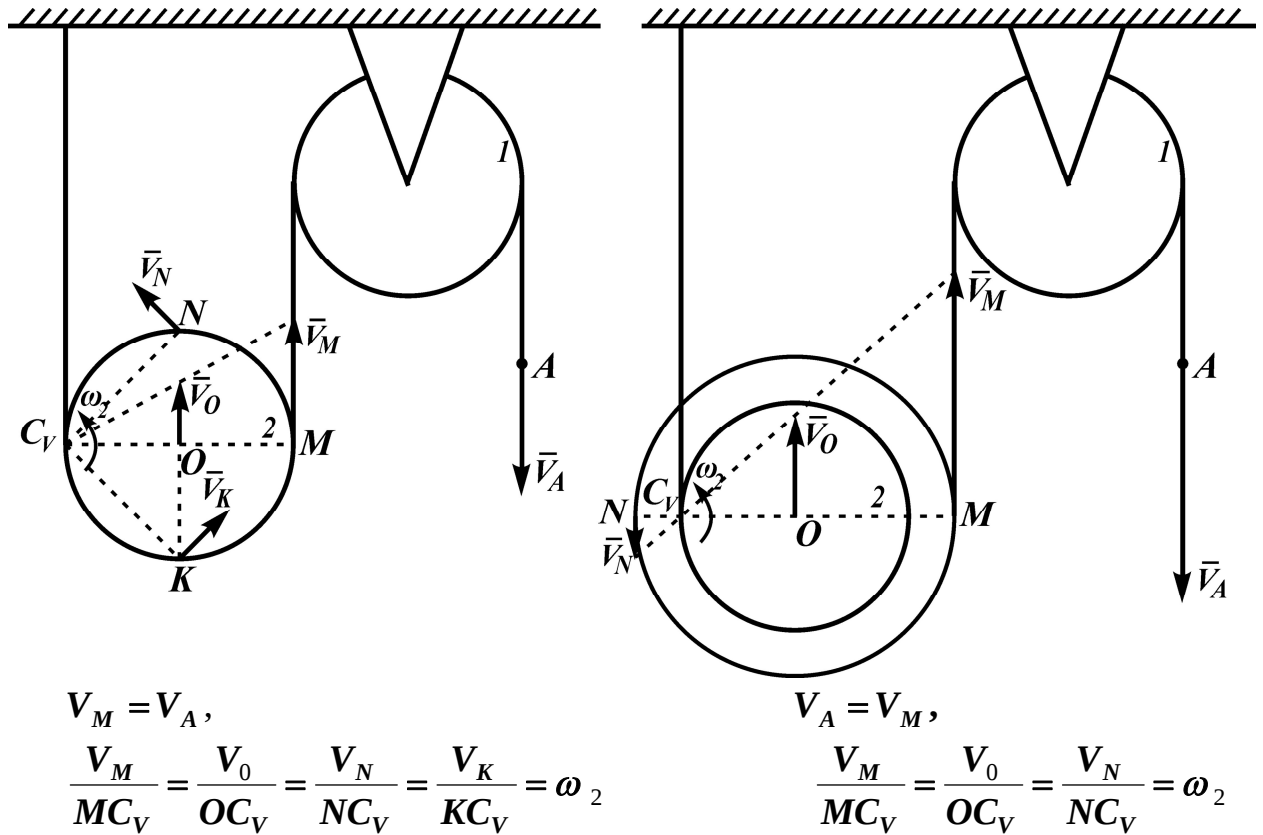


Рисунок 2.21

2.3.2 Ускорение точки в плоскопараллельном движении

Из выражения $\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}$ (или $\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AM}$) путем дифференцирования получаем

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{AM} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AM}) = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{ep} + \bar{a}_{MA}^u = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}. \quad (2.15)$$

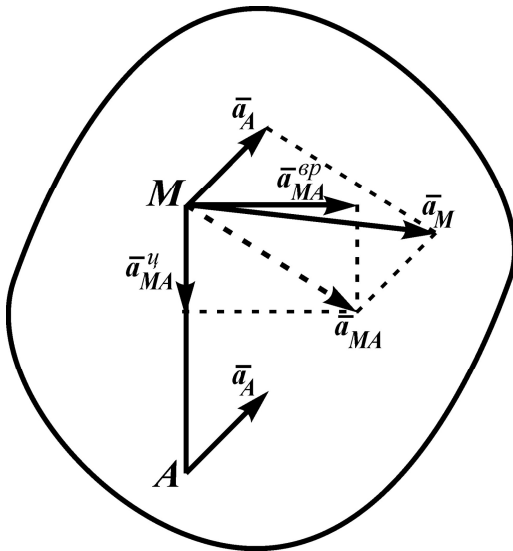


Рисунок 2.22

$$a_{MA} = \sqrt{(a_{MA}^{ep})^2 + (a_{MA}^u)^2},$$

где a_{MA}^{ep} – вращательное ускорение точки M при вращении вокруг точки A ;

$$\bar{a}_{MA}^{ep} = \bar{\varepsilon} \times \bar{AM}, \quad \bar{a}_{MA}^{ep} \perp \bar{AM};$$

$$a_{MA}^{ep} = \varepsilon \cdot AM;$$

a_{MA}^u – центростремительное ускорение точки M при вращении вокруг точки A ;

$$\bar{a}_{MA}^u = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{AM}) = \bar{\omega} \times \bar{V}_{MA};$$

$$a_{MA}^u = \omega^2 AM.$$

Центростремительное ускорение $\bar{a}_{MA}''$ направлено от точки M к полюсу A .

Численную величину полного ускорения можно определить, спроецировав векторное равенство (2.15) на выбранные оси координат:

$$\begin{aligned} a_{M_x} &= a_{A_x} + a_{MA_x}^{ep} + a_{MA_x}''; \\ a_{M_y} &= a_{A_y} + a_{MA_y}^{ep} + a_{MA_y}''; \\ a_M &= \sqrt{(a_{M_x})^2 + (a_{M_y})^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.3.3 Мгновенный центр ускорений

В учебной литературе доказывается, что при движении фигуры в плоскости в каждый момент времени существует такая точка плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю. Эту точку называют мгновенным центром ускорений (МЦУ). В наших рассуждениях будем обозначать её буквой Q . Взяв эту точку за полюс, получим формулу для определения ускорения произвольной точки:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ}'' + \bar{a}_{MQ}^{ep} = \bar{a}_{MQ}'' + \bar{a}_{MQ}^{ep}, \text{ т.к. } \bar{a}_Q = 0,$$

или

$$a_M = \sqrt{(a_{MQ}'')^2 + (a_{MQ}^{ep})^2} = \sqrt{(\omega^2 \cdot QM)^2 + (\varepsilon \cdot QM)^2} = QM \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

$$a_N = QN \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Угол, который составляет вектор ускорения точки M с линией MQ , определится из соотношения:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_{MQ}^{ep}}{a_{MQ}''} = \frac{\varepsilon \cdot QM}{\omega^2 \cdot QM} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

То есть у всех точек плоской фигуры этот угол одинаков. Из рисунка 2.23 видно, что мгновенный центр ускорений лежит в точке пересечения линий, составляющих угол γ с соответствующими ускорениями точек.

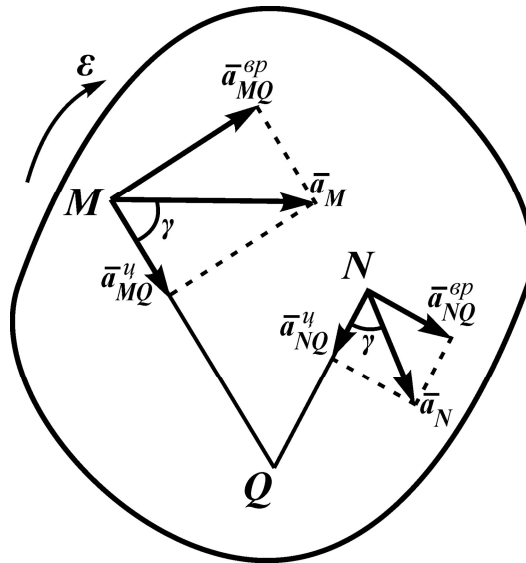
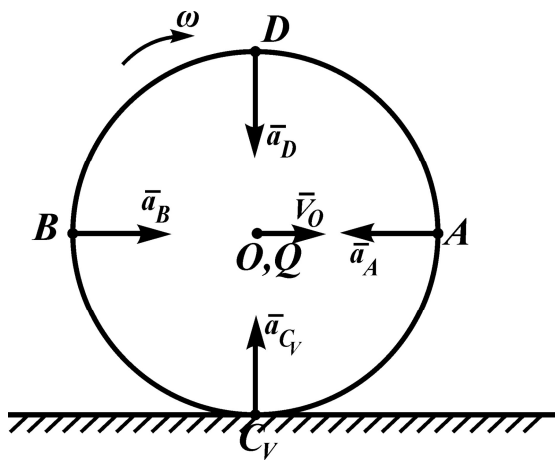
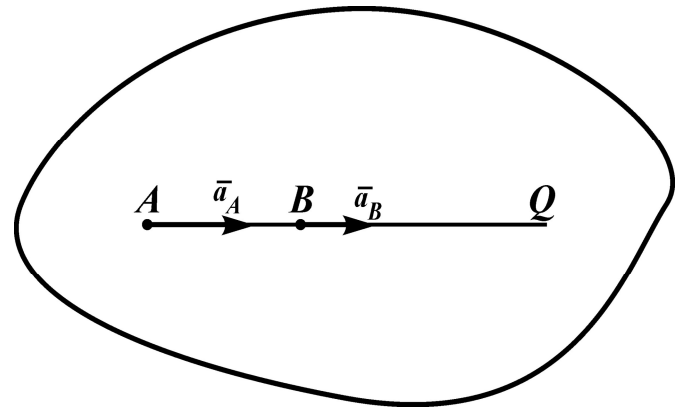


Рисунок 2.23

На рисунках 2.24–2.26 приведены частные случаи определения положения мгновенного центра ускорений.



а



б

$$V_0 - \text{const}, \quad \omega = \frac{V_0}{R}, \quad \varepsilon = 0,$$

$$tq\gamma = 0, \quad \gamma = 0,$$

$$a_A = a_B = a_D = a_{C_v} = \omega^2 R = \frac{V_0^2}{R},$$

т. О – МЦУ

$$\varepsilon = 0, \quad \omega \neq 0,$$

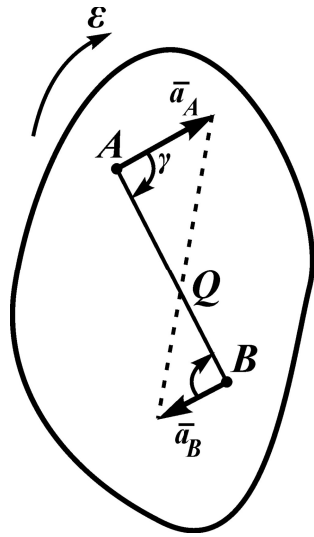
$$tq\gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0,$$

$$\gamma = 0^\circ,$$

$$a_A = \omega^2 \cdot AQ,$$

$$a_B = \omega^2 \cdot BQ$$

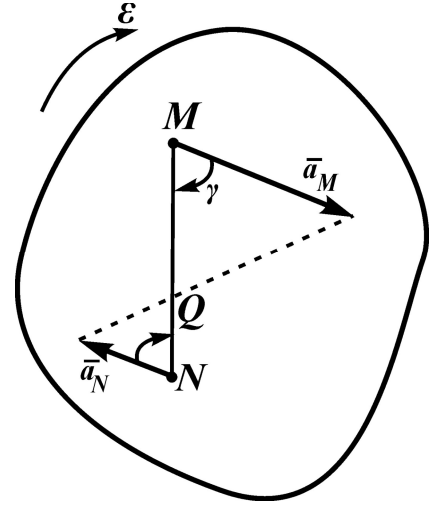
Рисунок 2.24



a

$$\varepsilon \neq 0, \omega = 0, \operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \infty, \gamma = 90^\circ,$$

$$AQ = \frac{a_A}{\varepsilon}, BQ = \frac{a_B}{\varepsilon}$$



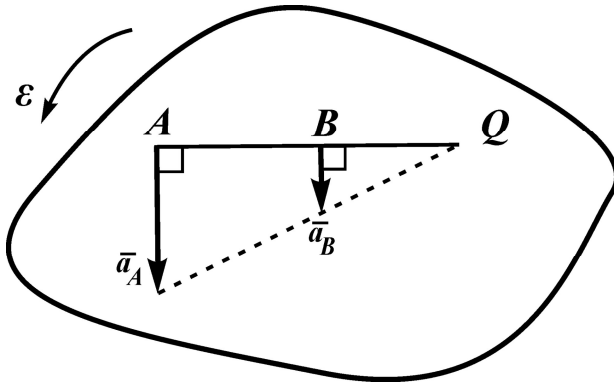
б

$$\varepsilon \neq 0, \omega \neq 0,$$

$$a_M = QM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$a_N = QN \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Рисунок 2.25

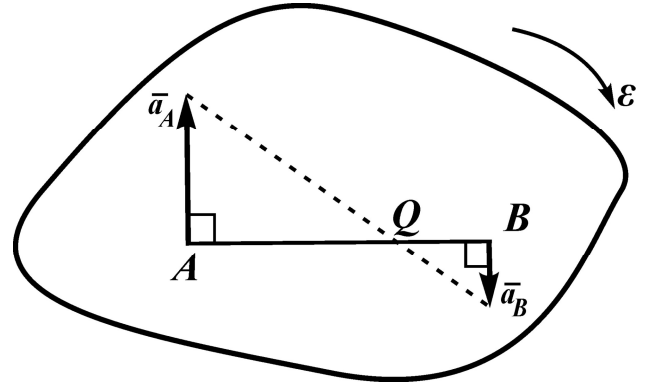


a

$$\varepsilon \neq 0, \omega = 0, \operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \infty,$$

$$\gamma = 90^\circ,$$

$$a_A = \varepsilon \cdot AQ, a_B = \varepsilon \cdot BQ$$



б

$$\varepsilon \neq 0, \omega = 0,$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \infty, \gamma = 90^\circ,$$

$$a_A = \varepsilon \cdot AQ, a_B = \varepsilon \cdot BQ$$

Рисунок 2.26

2.3.4 Примеры решения задач

Пример 1

Для данного положения механизма, изображенного на рисунке 2.27, определить скорости и ускорения точек B и K . Известны: $O_1A = 20\text{ см}$, $AB = 40\text{ см}$, $O_2B = 15\text{ см}$, $AK = 25\text{ см}$, $\angle O_1AB = 150^\circ$, $\angle O_2BA = 90^\circ$. Кривошип O_1A в данный момент вращается с угловой скоростью $\omega_{O_1A} = 2\text{ с}^{-1}$ и угловым ускорением $\varepsilon_{O_1A} = 2\text{ с}^{-2}$ (против хода часовой стрелки).

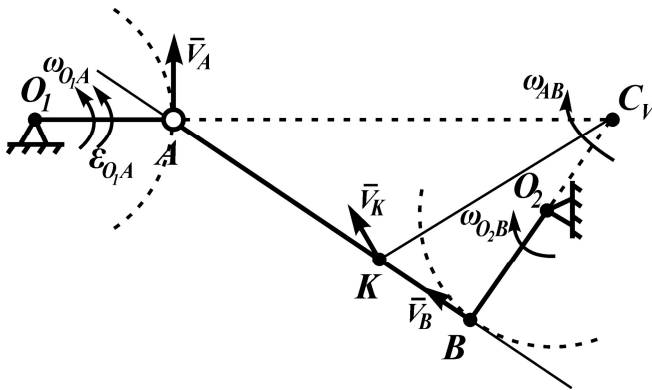


Рисунок 2.27

Решение

В данном механизме точки A и B могут перемещаться по дугам окружностей с радиусами O_1A и O_2B соответственно; шток AB совершает плоскопараллельное движение. Определим скорость точки A :

$$V_A = \omega_{O_1A} \cdot O_1A = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с}.$$

Скорость точки A перпендикулярна отрезку O_1A и направлена вверх. Скорость точки B , как точки, вращающейся вокруг точки O_2 , перпендикулярна O_2B , в нашем случае направлена вдоль линии AB .

Определим скорости точек B и K разными способами.

1) По теореме о скоростях точек в плоскопараллельном движении можно написать:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}. \quad (2.17)$$

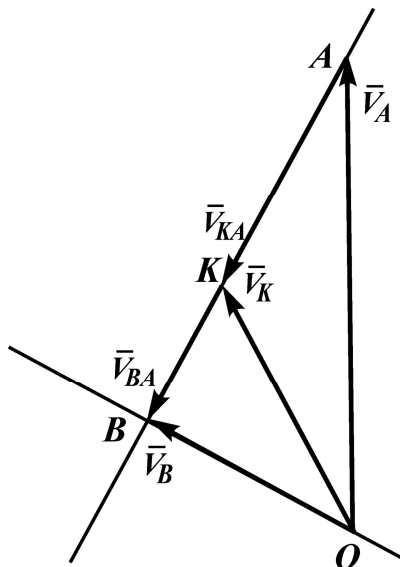


Рисунок 2.28

Точка A выбрана за полюс, т.к. о ней все известно; направления линий, вдоль которых направлены $\bar{V}_B$ и $\bar{V}_{BA}$, также известны. Строим соответствующий формуле (2.17) треугольник (рисунок 2.28). Из произвольной точки в масштабе откладываем вектор $\bar{V}_A$ с соответствующим направлением. Из конца вектора $\bar{V}_A$ проводим линию, перпендикулярную линии, проходящей через шток AB . Часть этой линии будет соответствовать вращательной скорости точки B вокруг полюса A . Длину вектора $\bar{V}_{BA}$ получим, если из точки O проведем линию, параллельную скорости точки B .

Получившийся в результате такого построения треугольник соответствует формуле (2.17). Величины векторов $\overline{V}_B$ и $\overline{V}_{BA}$ можно получить, умножив длины стрелок на масштаб.

Если построение выполнялось не в масштабе, а лишь с соблюдением геометрии, то можно воспользоваться теоремой синусов:

$$\frac{V_A}{\sin 90^\circ} = \frac{V_B}{\sin 30^\circ} = \frac{V_{BA}}{\sin 60^\circ}.$$

Из этого соотношения определяются величины $\overline{V}_B$ и $\overline{V}_{BA}$ соответственно:

$$V_B = \frac{V_A}{\sin 90^\circ} \cdot \sin 30^\circ = \frac{40 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 20 \text{ см/с};$$

$$V_{BA} = \frac{V_A}{\sin 90^\circ} \cdot \sin 60^\circ = \frac{40}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 34,64 \text{ см/с}.$$

Определив скорость точки B во вращательном движении вокруг точки A ($\overline{V}_{BA}$), можно определить угловую скорость штока AB :

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{34,64}{40} = 0,87 \text{ с}^{-1}.$$

Направление вектора $\overline{V}_{BA}$ показывает, что вращение точки B вокруг точки A и, соответственно, штока AB происходит в направлении хода часовой стрелки (рисунки 2.27, 2.28).

Для определения скорости точки K можно написать

$$V_{KA} = \omega_{AB} \cdot AK = 0,87 \cdot 25 = 21,65 \text{ см/с}.$$

Этот вектор также как и $\overline{V}_{BA}$ перпендикулярен линии, проходящей через точки A и B , и на рисунке 2.28 он будет отложен по вектору $\overline{V}_{BA}$. Можно написать соотношение:

$$\frac{V_{KA}}{V_{BA}} = \frac{ak}{ab} = \frac{0,87 \cdot 25}{0,87 \cdot 40} = \frac{5}{8},$$

которое определяет положение точки K на линии AB и тем самым определяет величину и направление вектора $\overline{V}_K$ (рисунок 2.28):

$$V_K = \sqrt{V_A^2 + V_{KA}^2 - 2 \cdot V_A \cdot V_{KA} \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{40^2 + 21,65^2 - 2 \cdot 40 \cdot 21,65 \cdot 0,86} = 23,85 \text{ см/с}.$$

2) Скорость точки **B** может быть определена другим способом: с помощью следствия из теоремы о скоростях точек в плоскопараллельном движении (см. раздел 2.3.1.2).

Для данной задачи это следствие запишется

$$V_A \cdot \cos 60^\circ = V_B \cdot \cos 0^\circ,$$

$$\text{т.е. } V_B = V_A \cdot \cos 60^\circ = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ см/с}.$$

3) На практике более распространен способ определения скоростей точек в плоскопараллельном движении с помощью мгновенного центра скоростей (МЦС). Он находится в точке пересечения перпендикуляров к скоростям точек движущегося тела и для шатуна **AB** может быть записано соотношение (рисунок 2.27):

$$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \frac{V_K}{KC_V} = \omega_{AB}.$$

Так как геометрия механизма известна, то все расстояния и величины скоростей определяются:

$$AC_V = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{40}{0,87} = 46,19 \text{ см};; BC_V = AB \cdot \tan 30^\circ = 40 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 23,09 \text{ см};$$

$$KC_V = \sqrt{AK^2 + AC_V^2 - 2 \cdot AK \cdot AC_V \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{25^2 + 46,19^2 - 2 \cdot 25 \cdot 46,19 \cdot 0,87} = 27,55 \text{ см};$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_V} = \frac{40}{46,19} = 0,87 \text{ с}^{-1};$$

$$V_B = \frac{V_A}{AC_V} \cdot BC_V = \frac{40}{46,19} \cdot 23,09 = 20 \text{ см/с};$$

$$V_K = \frac{V_A}{AC_V} \cdot KC_V = \frac{40}{46,19} \cdot 27,55 = 23,85 \text{ см/с}.$$

Определив скорость точки B , которая принадлежит и штоку AB и звену O_2B , можно найти угловую скорость O_2B :

$$\omega_{O_2B} = \frac{V_B}{O_2B} = \frac{20}{15} = 1,33 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения ускорений точек B и K определим ускорение точки A , вращающейся вокруг неподвижного центра O_1 :

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau, \quad a_A^n = \omega_{O_1A}^2 \cdot O_1A = 2^2 \cdot 20 = 80 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{O_1A} \cdot O_1A = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{80^2 + 40^2} = 89,44 \text{ см/с}^2.$$

Приняв точку A за полюс запишем

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^u + \bar{a}_{BA}^{ep}.$$

В последней формуле первые два слагаемые известны, а третье можно определить:

$$a_{BA}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,87^2 \cdot 40 = 30,28 \text{ см/с}^2.$$

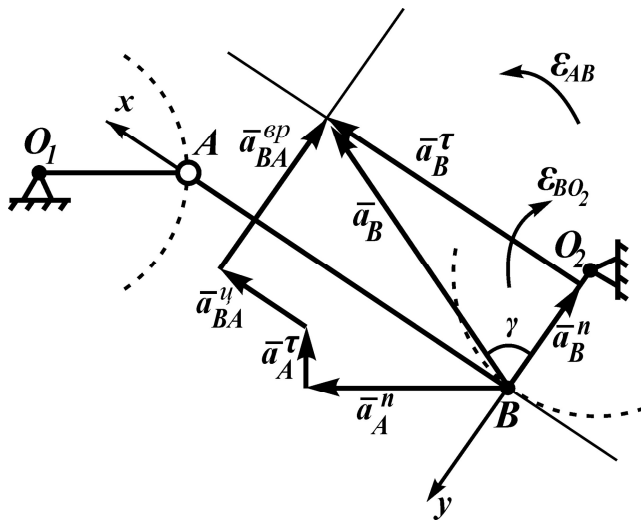


Рисунок 2.29

Этот вектор направлен от точки B к полюсу A .

Вращательное ускорение точки B вокруг A — $\bar{a}_{BA}^{ep}$ — по величине не определяется, но известно его направление:

$$\bar{a}_{BA}^{ep} \perp AB.$$

Учитывая, что точка B принадлежит двум звеньям и что звено O_2B вращается вокруг неподвижной точки O_2 , можно

написать формулу $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau$ и, следовательно,

$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^u + \bar{a}_{BA}^{ep}. \quad (2.18)$$

В формуле (2.18) a_B^n – нормальное ускорение точки B при вращении вокруг O_2 известно:

$$a_B^n = \omega_{O_2 B}^2 \cdot O_2 B = 1,33^2 \cdot 15 = 26,53 \text{ см/с}^2.$$

Этот вектор направлен от точки B к точке O_2 . Вектор $\bar{a}_B^\tau$ известен только по направлению:

$$\bar{a}_B^\tau \perp BO_2.$$

В формуле (2.18) две неизвестные по модулю величины. Эту векторную сумму можно построить (рисунок 2.29). Пересечение линии, проведенной из конца вектора $\bar{a}_{BA}^u$ перпендикулярно AB (так направлен вектор $\bar{a}_{BA}^{ep}$) и линии, проведенной из конца вектора $\bar{a}_B^n$ перпендикулярно BO_2 (так направлен вектор $\bar{a}_B^\tau$) определяют вектор $\bar{a}_B$, так как это построение отражает формулы:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^u + \bar{a}_{BA}^{ep}, \quad \bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau.$$

Если данное построение выполнялось с соблюдением масштаба, то измерив длины соответствующих отрезков, можно определить по величине $\bar{a}_B$, $\bar{a}_B^\tau$, $\bar{a}_{BA}^{ep}$.

Аналитическое определение величин этих векторов можно выполнить, спроецировав формулу (2.18) на выбранные оси координат (xBy). Расчет упрощается, если одну из осей совместить со штоком AB (рисунок 2.29):

$$a_B^n \cdot \cos 90^\circ + a_B^\tau \cdot \cos 0^\circ = a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^u \cdot \cos 0^\circ + a_{BA}^{ep} \cdot \cos 90^\circ; (*)$$

$$a_B^n \cdot \cos 180^\circ + a_B^\tau \cdot \cos 90^\circ = a_A^n \cdot \cos 60^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 150^\circ + a_{BA}^u \cdot \cos 90^\circ + a_{BA}^{ep} \cdot \cos 180^\circ. (**)$$

Из этих двух выражений определяются величины a_B^τ и a_{BA}^{ep} .

Из (*):

$$a_B^\tau = a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ + a_{BA}^u \cdot \cos 0^\circ = 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 40 \cdot \frac{1}{2} + 30,28 \cdot 1 = 119,48 \text{ см/с}^2;$$

из (**): $-a_B^n = a_A^n \cdot \cos 60^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 150^\circ + a_{BA}^{ep} \cdot \cos 180^\circ;$

$$-26,53 = 80 \cdot \frac{1}{2} - 40 \frac{\sqrt{3}}{2} - a_{BA}^{ep}; \quad a_{BA}^{ep} = 80 \cdot \frac{1}{2} - 40 \frac{\sqrt{3}}{2} + 26,53 = 32,13 \text{ см/с}^2.$$

Определение этого вектора позволяет найти угловое ускорение штока AB :

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{ep}}{AB} = \frac{32,13}{40} = 0,80 \text{ с}^{-2},$$

т.е. шток AB ускоряется против хода часовой стрелки, его вращение в данный момент замедленное. Определение a_B^τ дает возможность найти угловое ускорение звена BO_2 :

$$\varepsilon_{BO_2} = \frac{a_B^\tau}{BO_2} = \frac{119,48}{15} = 7,96 \text{ с}^{-2}.$$

Звено BO_2 вращается ускоренно (направления ω_{BO_2} и ε_{BO_2} совпадают). Полное ускорение точки B

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{(26,53)^2 + (119,48)^2} = 122,39 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_B$ составляет угол γ с звеном BO_2 :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_B^\tau}{a_B^n} = \frac{119,48}{26,53} = 4,50, \quad \gamma = \operatorname{arctg} 4,50 \approx 77^\circ 30'.$$

Ускорение точки K находится из формулы:

$$\bar{a}_K = \bar{a}_A + \bar{a}_{KA} = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{KA}^u + \bar{a}_{KA}^{ep}, \quad (***)$$

в которой все слагаемые определяются: a_A^n и a_A^τ уже найдены:

$$a_{KA}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AK = 0,87^2 \cdot 25 = 18,92 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{KA}^{ep} = \varepsilon_{AB} \cdot AK = 0,80 \cdot 25 = 20,0 \text{ см/с}^2.$$

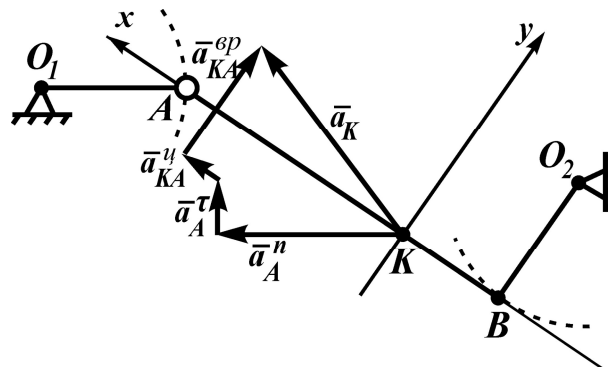


Рисунок 2.30

Спроецировав формулу (***) на оси системы xKy , получим:

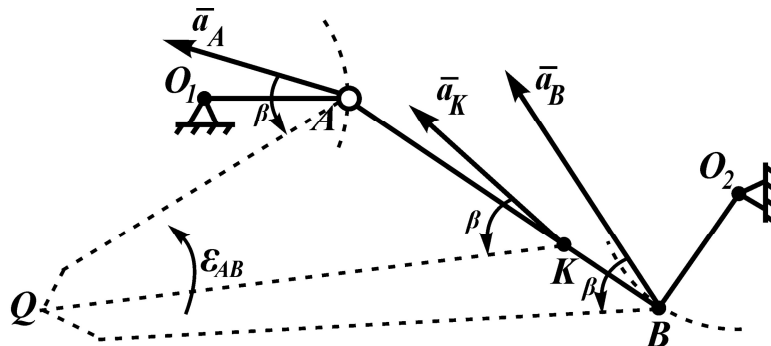
$$a_{K_x} = a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ + a_{KA}^u \cdot \cos 0^\circ + a_{KA}^{ep} \cdot \cos 90^\circ = 80 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 40 \cdot \frac{1}{2} + 18,92 + 20,0 \cdot 0 = 107,72 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{K_y} = a_A^n \cdot \cos 120^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 30^\circ + a_{KA}^u \cdot \cos 90^\circ + a_{KA}^{ep} \cdot \cos 0^\circ = 80 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 40 \cdot 0,86 + 18,92 \cdot 0 + 20 \cdot 1 = 14,4 \text{ см/с}^2.$$

Полное ускорение точки K :

$$a_K = \sqrt{(a_{K_x})^2 + (a_{K_y})^2} = \sqrt{107,72^2 + 14,4^2} = 108,68 \text{ см/с}^2.$$

Определение угловой скорости и вращательного ускорения штока AB позволяют найти его мгновенный центр ускорений. Для этого определим угол β :



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \frac{0,80}{0,87^2} = 1,06, \\ \beta &= \operatorname{arctg} 1,06 \approx 46^\circ 40'. \end{aligned}$$

Рисунок 2.31

Отложив от известных ускорений точек A, B и K угол β («в сторону ε »), получим точку пересечения этих лучей Q (рисунок 2.31), которая и является мгновенным центром ускорений штока AB .

Ускорения точек должны соответствовать соотношениям:

$$a_A = AQ \cdot \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4},$$

$$a_K = KQ \cdot \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}, \quad \text{или} \quad \frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_K}{KQ}.$$

$$a_B = BQ \cdot \sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}.$$

Пример 2

Кривошип OA , вращаясь вокруг неподвижной точки O , приводит в движение колесо 2, которое катится по неподвижному колесу 1. Определить скорость и ускорение точки B колеса 2 в заданном положении, если известны:

$$R_1 = 20 \text{ см}, r_2 = 15 \text{ см}, \omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}, \varepsilon_{OA} = 4 \text{ с}^{-2}.$$

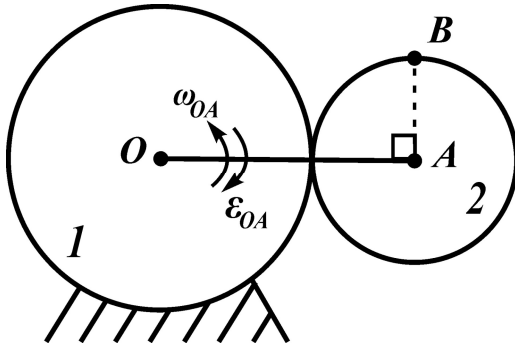


Рисунок 2.32

Решение

Колесо 2 совершает плоскопараллельное движение. Центр колеса 2 – точка A – принадлежит кривошипу OA и движется по окружности, поэтому можно определить скорость и ускорение точки A :

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot (20 + 15) = 70 \text{ см/с};$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau; a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot (20 + 15) = 140 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 4 \cdot (20 + 15) = 140 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{140^2 + 140^2} = 198,0 \text{ см/с}^2.$$

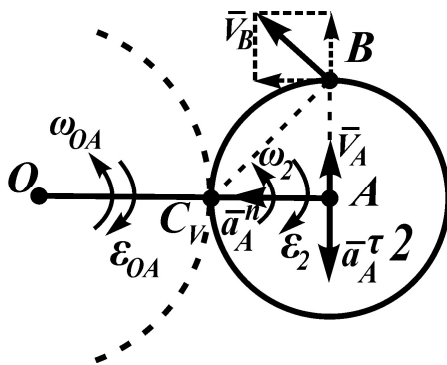


Рисунок 2.33

На рисунке 2.33 показано направление соответствующих векторов. Поскольку первое колесо неподвижно, то общая точка для первого и второго колеса является для последнего мгновенным центром скоростей C_V и для скоростей точек второго колеса должно выполняться соотношение

$$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega_2,$$

т.к. все точки второго колеса в этот момент времени вращаются вокруг точки C_V (МЦС). Это определяет направление вращения второго колеса и направление скорости точки B (рисунок 2.33).

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V} = \frac{70}{15} = 4,67 \text{ с}^{-1}, \quad V_B = \omega_2 \cdot BC_V = 4,67 \cdot 15\sqrt{2} = 98,77 \text{ см/с}.$$

Скорость точки **B** можно получить, воспользовавшись теоремой о скоростях точек в плоском движении: $\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}}$ (показано пунктиром на рисунке 2.33). В этой формуле вращательная скорость точки **B** вокруг полюса **A** определяется из соотношения:

$$V_{BA} = \omega_2 \cdot AB = \omega_2 \cdot r_2 = 4,67 \cdot 15 = 70 \text{ см/с}.$$

Этот вектор перпендикулярен **AB**, следовательно, и $\overline{V_A}$. Тогда скорость точки **B**

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + V_{BA}^2} = \sqrt{70^2 + 70^2} = 98,70 \text{ см/с}.$$

Ускорение точки **B** определится согласно теореме об ускорениях точек в плоскопараллельном движении по формуле $\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}}$; для нашего случая $\overline{a_B} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau} + \overline{a_{BA}''} + \overline{a_{BA}^{ep}}$.

Касательное и нормальное ускорения точки **A** определены выше. Центростремительное ускорение точки **B** при вращении вокруг полюса **A** определяется по формуле

$$a_{BA}'' = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \omega_2^2 \cdot r = 4,67^2 \cdot 15 = 327,13 \text{ см/с}^2.$$

Этот вектор направлен от точки **B** к полюсу **A**.

Для определения вращательного ускорения $\overline{a_{BA}^{ep}}$ необходимо определить угловое ускорение второго колеса. В задачах такого типа оно определяется

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_A}{AC_V} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_A}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{dV_A}{dt} = \frac{1}{r} a_A^\tau.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{15} \cdot 140 = 9,33 \text{ с}^{-2}.$$

Точка **A** движется замедленно ($\overline{a_A^\tau}$ противоположно $\overline{V_A}$), следовательно, замедленным будет и вращение второго колеса (ε_2 направлено по ходу часовой стрелки):

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot r = 9,33 \cdot 15 = 140,0 \text{ см/с}^2.$$

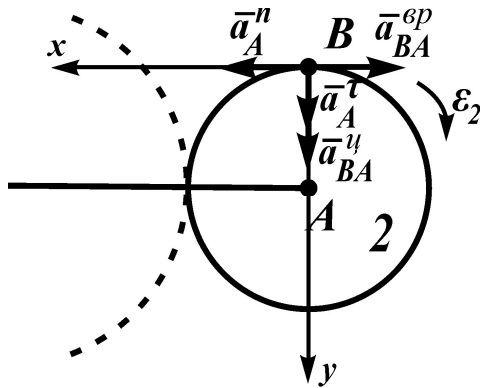


Рисунок 2.34

На рисунке 2.34 показаны направления векторов, определяющих полное ускорение точки B .

Спроецировав векторное равенство для определения ускорения точки B на оси xBy , получим

$$a_{B_x} = a_A^n - a_{BA}^{\epsilon p} = 140 - 140 = 0 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{B_y} = a_A^{\tau} + a_{BA}^u = 140 + 327,13 = 467,13 \text{ см/с}^2;$$

$$a_B = \sqrt{a_{B_x}^2 + a_{B_y}^2} = 467,13 \text{ см/с}^2.$$

В данном примере ускорение точки B направлено от B к точке A .

Пример 3

Кривошип OA , вращаясь вокруг неподвижной точки O , приводит в движение колесо 2, которое катится по колесу 1, вращающемуся с угловой скоростью $\omega_1 = 5 \text{ с}^{-1}$, $R_1 = 20 \text{ см}$, $r_2 = 15 \text{ см}$, $\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$. Для заданного механизма определить скорость и ускорение точки B .

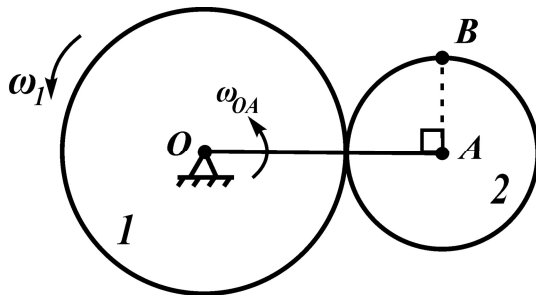


Рисунок 2.35

Решение

Колесо 2 совершает плоскопараллельное движение. Его центр – точка A – принадлежит также и кривошипу OA , вращающемуся вокруг неподвижной точки O . Скорость точки A определится из формулы

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_{OA} \cdot (R_1 + r_2),$$

$$V_A = 2 \cdot 35 = 70 \text{ см/с}.$$

Ускорение точки A , вращающейся с постоянной угловой скоростью,

$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 35 = 140 \text{ см/с}^2.$$

Направления векторов показаны на рисунке 2.36. В этой задаче точка K , принадлежащая первому и второму колесу (точка их зацепления), имеет скорость

$$V_K = \omega_1 \cdot R_1 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ см/с}.$$

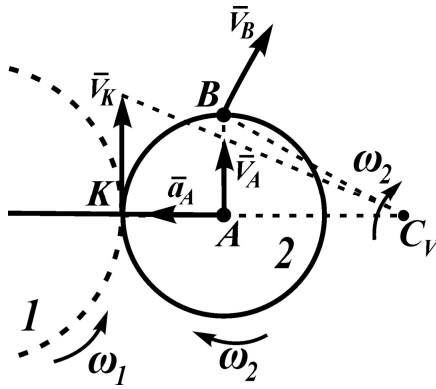


Рисунок 2.36

Мгновенный центр скоростей второго колеса будет находиться в точке C_V (рисунок 2.36). При этом должно выполняться соотношение

$$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_K}{KC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega_2,$$

из которого определяются расстояние до точки C_V и скорость точки B :

$$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_K}{KC_V}, \quad \frac{70}{AC_V} = \frac{100}{AC_V + r_2}; \quad \frac{70}{AC_V} = \frac{100}{AC_V + 15};$$

$$70 \cdot AC_V + 70 \cdot 15 = 100 \cdot AC_V, \quad AC_V = \frac{70 \cdot 15}{30} = 35 \text{ см};$$

$$BC_V = \sqrt{r_2^2 + AC_V^2} = \sqrt{15^2 + 35^2} = \sqrt{1450} = 38,08 \text{ см};$$

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V} = \frac{70}{35} = 2 \text{ с}^{-1}, \quad V_B = \omega_2 \cdot BC_V = 2 \cdot 38,08 = 76,16 \text{ см/с}.$$

Колесо 2 в этом примере вращается по ходу часовой стрелки. Направление вращения определяется соотношением скоростей V_A и V_K .

Если бы V_A оказалось больше по величине, чем V_K , то мгновенный центр скоростей C_V находился бы левее (рисунок 2.36) точки K и вращение колеса 2 происходило бы против хода часовой стрелки. Направление скорости точки B показано на рисунке 2.36: вектор $\vec{V}_B$ перпендикулярен линии BC_V .

Ускорение точки B определяем по формуле

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

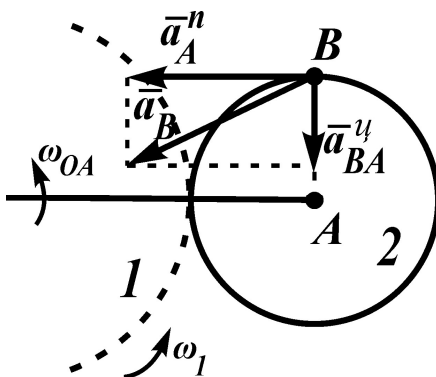


Рисунок 2.37

В данной задаче угловые скорости кривошипа OA и колеса 1 постоянны, поэтому второе колесо вращается также с постоянной угловой скоростью. Ускорение точки B определяется из формулы $\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}''$.

Центростремительное ускорение точки B при вращении вокруг точки A определяем по формуле

$$a_{BA}'' = \omega_2^2 \cdot r_2 = 2^2 \cdot 15 = 60 \text{ см/с}^2.$$

Этот вектор направлен от точки B к полюсу A .
Полное ускорение точки B

$$a_B = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_{BA}^u)^2} = \sqrt{(140)^2 + (60)^2} = 152,31 \text{ см/с}^2.$$

Направление ускорения определяется диагональю прямоугольника, построенного на векторах $\bar{a}_A^n$ и $\bar{a}_{BA}^u$.

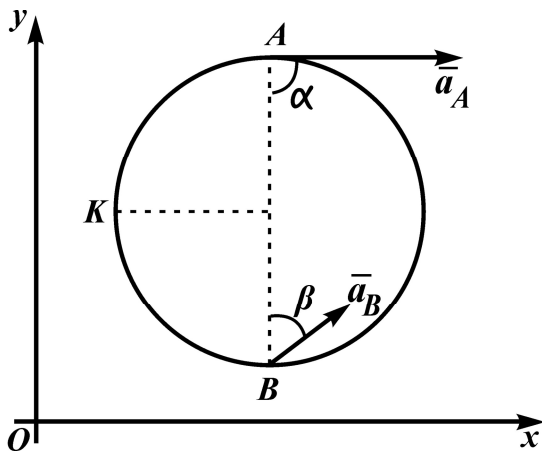


Рисунок 2.38

Пример 4

В плоскости xOy движется диск радиуса 20 см . Известны ускорения двух точек, лежащих на диаметре диска: $a_A = 40 \text{ см/с}^2$ и $a_B = 20 \text{ см/с}^2$. Их направления указаны на рисунке 2.38: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Определить ускорение точки K , лежащей в середине дуги AB .

Решение

Для определения угловой скорости и углового ускорения диска напомним формулу для ускорения точки B , взяв за полюс точку A :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^u + \bar{a}_{BA}^{ep}.$$

В этой формуле два вектора $\bar{a}_A$ и $\bar{a}_B$ полностью известны, у векторов $\bar{a}_{BA}^u$ и $\bar{a}_{BA}^{ep}$ неизвестны величины, но известны направления: вектор $\bar{a}_{BA}^u$ направлен от B к точке A , т.е. он перпендикулярен $\bar{a}_A$, а вектор $\bar{a}_{BA}^{ep}$ перпендикулярен отрезку AB и вектору $\bar{a}_{BA}^u$. Следовательно, это векторное равенство можно построить (рисунок 2.39).

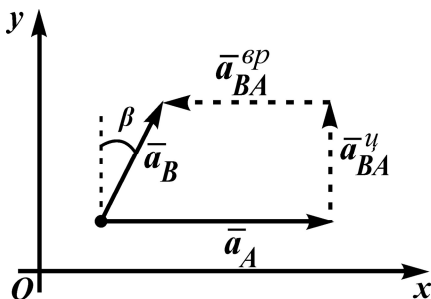


Рисунок 2.39

Спроецировав равенство на выбранные оси координат, получим два выражения:

$$a_B \cdot \cos 60^\circ = a_A + a_{BA}^u \cdot \cos 90^\circ + a_{BA}^{ep} \cdot \cos 180^\circ,$$

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a_A \cdot \cos 90^\circ + a_{BA}^u \cdot \cos 0^\circ + a_{BA}^{ep} \cdot \cos 90^\circ.$$

Решая эти выражения, получим:

$$a_{BA}^{ep} = a_A - a_B \cdot \cos 60^\circ = 40 - 20 \cdot \frac{1}{2} = 30 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BA}'' = a_B \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,8 = 17,3 \text{ см/с}^2.$$

Учитывая, что $a_{BA}^{ep} = \varepsilon \cdot AB$ и $a_{BA}'' = \omega^2 \cdot AB$, находим

$$\varepsilon = \frac{30}{40} = 0,75 \text{ с}^{-2}, \quad \omega^2 = \frac{17,3}{40} = 0,43.$$

Направление вектора $\vec{a}_{BA}^{ep}$ показывает, что угловое ускорение диска направлено по ходу часовой стрелки.

Для определения ускорения точки K запишем формулу

$$\vec{a}_K = \vec{a}_A + \vec{a}_{KA}'' + \vec{a}_{KA}^{ep},$$

в которой $a_{KA}'' = \omega^2 \cdot KA = \omega^2 \cdot R\sqrt{2} = 0,43 \cdot 20 \cdot 1,41 = 12,13 \text{ см/с}^2$.

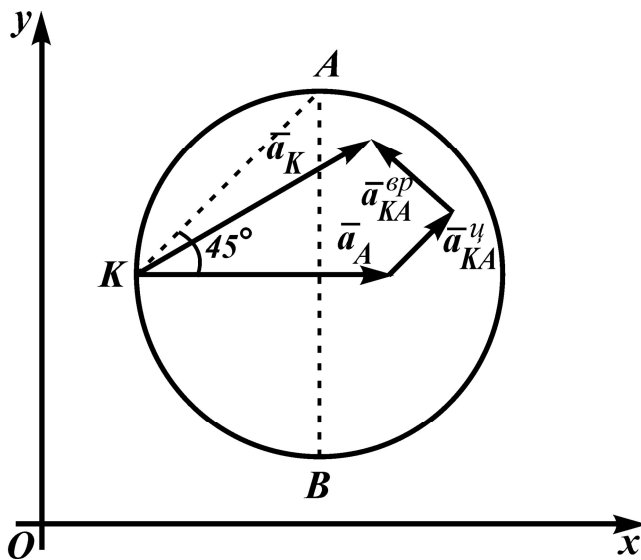


Рисунок 2.40

Этот вектор направлен от точки K к точке A .

$$a_{KA}^{ep} = \varepsilon \cdot KA,$$

$$a_{KA}^{ep} = 0,75 \cdot 20 \cdot 1,41 = 21,15 \text{ см/с}^2.$$

$\vec{a}_{KA}^{ep} \perp AK$, его направление определяется направлением углового ускорения диска.

На рисунке 2.40 показано геометрическое сложение векторов, определяющих ускорение точки K . Все составляющие известны по величине и направлению. Поэтому, построив в масштабе векторный многоугольник, можно определить величину и направление ускорения точки K .

Для выполнения аналитических расчетов формулу, определяющую ускорение точки K , проецируем на выбранные оси:

$$a_{K_x} = a_A \cdot \cos 0^\circ + a_{KA}^u \cdot \cos 45^\circ + a_{KA}^{ep} \cdot \cos 135^\circ = 40 + 12,13 \cdot 0,707 - 21,15 \cdot 0,707 = 13,62 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{K_y} = a_A \cdot \cos 90^\circ + a_{KA}^u \cdot \cos 45^\circ + a_{KA}^{ep} \cdot \cos 45^\circ = 0 + 12,13 \cdot 0,707 + 21,15 \cdot 0,707 = 23,53 \text{ см/с}^2.$$

Полное ускорение точки K :

$$a_K = \sqrt{(a_{K_x})^2 + (a_{K_y})^2} = \sqrt{13,62^2 + 23,53^2} = 27,19 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $\bar{a}_K$ определяют углы, которые он составляет с осями координат:

$$\cos(\bar{a}_K \wedge \bar{i}) = \frac{a_{K_x}}{a_K} = \frac{13,62}{27,19} = 0,50, \quad \gamma = 60^\circ;$$

$$\cos(\bar{a}_K \wedge \bar{j}) = \frac{a_{K_y}}{a_K} = \frac{23,53}{27,19} = 0,866, \quad \gamma = 30^\circ.$$

3 СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

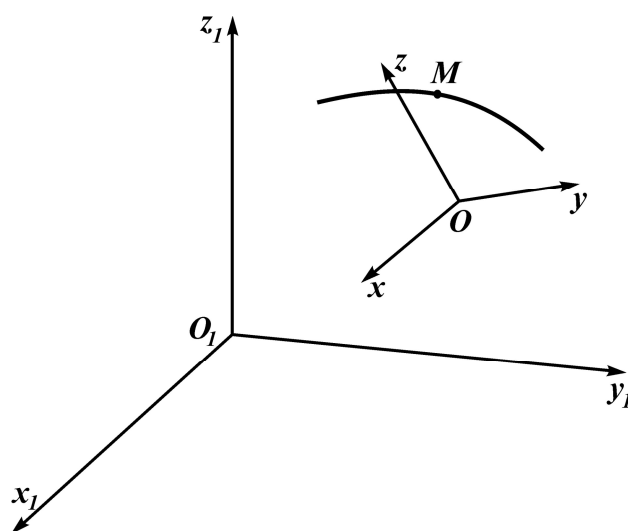


Рисунок 3.1

Законы Ньютона сформулированы для движения точки по отношению к инерциальным системам отсчета. Для определения кинематических параметров точки при движении относительно произвольно движущейся системы отсчета вводится теория сложного движения.

Сложным называют движение точки по отношению к двум или нескольким системам отсчета.

На рисунке 3.1 показаны:

- условно принимаемая за неподвижную система отсчета $O_1x_1y_1z_1$;
- движущаяся относительно неподвижной система отсчета $Oxyz$;

– точка M , перемещающаяся по отношению к подвижной системе отсчета.

Движение точки M в данном случае является сложным. Её движение по отношению к подвижной системе отсчета называют **относительным движением**. Движение той точки подвижной системы отсчета, в которой в данный момент находится движущаяся точка, по отношению к неподвижной системе отсчета называют **переносным движением**. Движение точки M по отношению к неподвижной системе отсчета называют **абсолютным движением**.

По аналогии с этими определениями будут называться относительные, переносные и абсолютные скорости и ускорения точки. Для их обозначения в относительном движении часто всего используется индекс r (relative – относительный) – $\bar{V}_r, \bar{a}_r$; в переносном движении индекс e (entrained – увлекать за собой) – $\bar{V}_e, \bar{a}_e$.

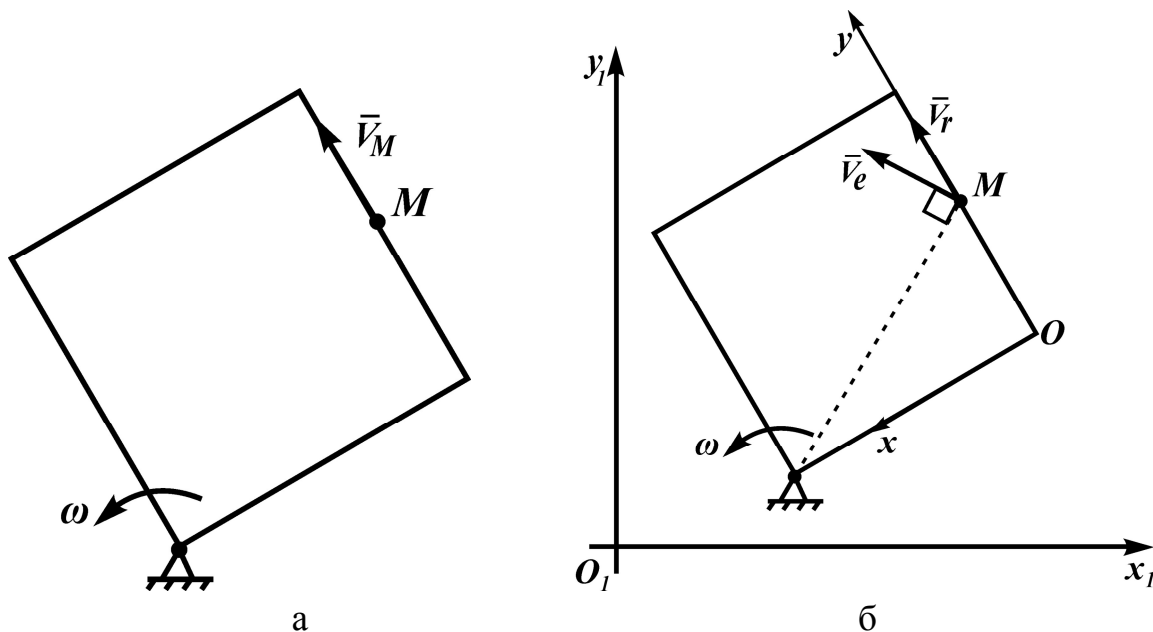


Рисунок 3.2

Ниже приведен пример сложного движения точки – M . На рисунке 3.2,а показан квадрат, вращающийся в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки. По стороне квадрата движется точка M . Она участвует в двух движениях, поэтому можно ввести две системы отсчета: неподвижную, например, $O_1x_1y_1z_1$ – по отношению к которой вращается квадрат и подвижную $Oxyz$, скрепленную с квадратом, по оси Oy которой движется точка M (рисунок 3.2,б). Движение точки M по стороне квадрата (по оси Oy скрепленной с квадратом подвижной системы) является относительным –

скорость в этом движении $\bar{V}_r$. Вращение точки M вместе с квадратом – переносное движение, скорость в этом движении – $\bar{V}_e$. Абсолютное движение является результатом сложения переносного и относительного движений.

3.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК В СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ

Теоремы о скоростях и ускорениях точек в сложном движении изложены во всех учебниках по теоретической механике. Абсолютная скорость точки определяется как геометрическая сумма переносной и относительной скоростей:

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r. \quad (3.1)$$

Каждое слагаемое в этой формуле определяется независимо друг от друга, исходя из соответствующего закона движения. В примере на рисунке 3.2 относительная скорость $\bar{V}_r$ определяется с учетом закона движения точки по оси Oy . Переносная скорость определится как скорость точки M при вращении вместе с квадратом вокруг оси его вращения. Величина абсолютной скорости может быть определена с помощью теоремы косинусов:

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 - 2V_e V_r \cos \alpha}. \quad (3.2)$$

Для определения вектора абсолютной скорости можно равенство (3.1) спроецировать на выбранные оси координат, найти проекции абсолютной скорости, её величину и направляющие косинусы, то есть определить углы, которые вектор скорости составляет с выбранными осями.

Ускорение точки определяется как сума трех ускорений: переносного, относительного и кориолисова (поворотного):

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \quad (3.3)$$

Первые два слагаемые этой формулы определяются из соответствующих законов переносного и относительного движений. В случае неравномерных криволинейных движений эта формула имеет вид

$$\bar{a} = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_k.$$

Кориолисово ускорение определяется по формуле:

$$\bar{a}_K = 2 \bar{\omega}_e \times \bar{V}_r. \quad (3.4)$$

$$\text{Величина этого ускорения } a_K = 2 \omega_e V_r \sin \alpha, \quad (3.5)$$

где α – угол между векторами переносной угловой и линейной относительной скоростями.

Направление кориолисова ускорения определяется двумя правилами.

1) Правило векторного произведения.

Согласно этому правилу вектор кориолисова ускорения перпендикулярен векторам $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$ (или плоскости, проходящей через эти вектора, проведенные из одной точки). Направлен вектор $\bar{a}_K$ так, что если смотреть ему навстречу, то кратчайший поворот вектора $\bar{\omega}_e$ до совмещения с вектором $\bar{V}_r$ происходит против хода часовой стрелки (рисунок 3.3).

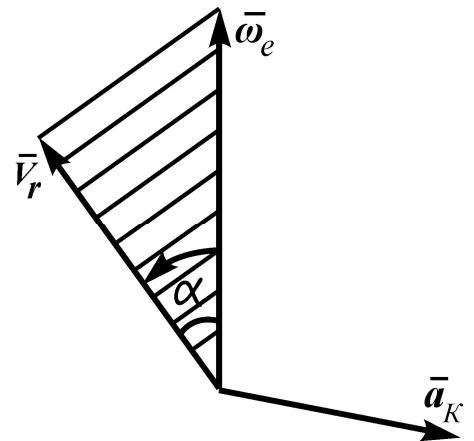


Рисунок 3.3

2) **Правило Жуковского.** Для определения направления кориолисова ускорения нужно спроецировать вектор относительной скорости в плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости и полученную проекцию повернуть на 90° в сторону переносного вращения (рисунок 3.4).

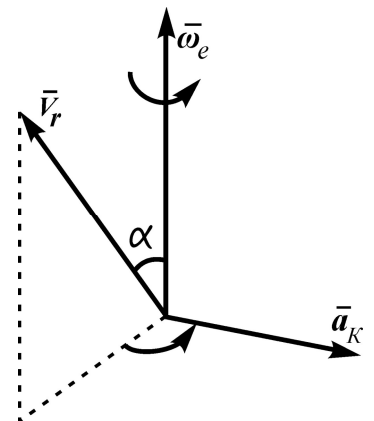


Рисунок 3.4

Из формулы (3.5) видно, что кориолисово ускорение равно нулю, если

- равна нулю относительная скорость;
- переносное движение – поступательное ($\omega_e = 0$);
- угол между $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$ равен 0° или 180° (вектор $\bar{V}_r$ параллелен оси переносного вращения).

Абсолютное ускорение точки определяется по аналогии с определением её скорости. Формула (3.3) проецируется на выбранные оси координат, и находятся проекции абсолютного ускорения на эти оси: a_x, a_y, a_z . Величина ускорения определяется по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (3.6)$$

Направление вектора абсолютного ускорения определяется с помощью направляющих косинусов, то есть определяются углы, которые вектор ускорения составляет с осями координат:

$$\begin{aligned} \cos\left(\widehat{\vec{a} \vec{i}}\right) &= \frac{a_x}{a}, & \gamma &= \arccos \frac{a_x}{a}; \\ \cos\left(\widehat{\vec{a} \vec{j}}\right) &= \frac{a_y}{a}, & \beta &= \arccos \frac{a_y}{a}; \\ \cos\left(\widehat{\vec{a} \vec{k}}\right) &= \frac{a_z}{a}, & \theta &= \arccos \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2 ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК В СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ

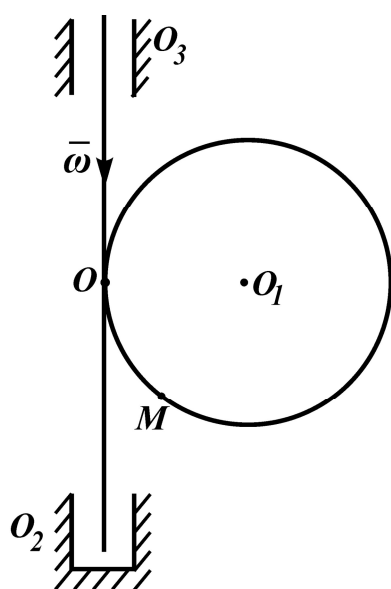


Рисунок 3.5

Пример 1

Диск радиуса $R = 0,5 \text{ м}$ вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости и касающейся диска, с угловой скоростью $\omega = \pi t^2 \text{ с}^{-1}$ (рисунок 3.5). По ободу диска движется точка M по закону: $\sphericalangle OM = \frac{1}{6} \pi R t^2 \text{ м}$. В момент времени $t = 2 \text{ с}$ определить абсолютные скорость и ускорение точки M .

Решение

Точка M в данном примере совершает сложное движение, которое может быть разложено на два движения: относительное движение — движение точки M по

движущемуся диску (именно с ним может быть скреплена подвижная система отсчета) и переносное движение – вращение диска вместе с находящейся на нем точкой. Поскольку переносное движение по определению это движение той точки диска, в которой находится в данный момент точка M , то сначала необходимо определить положение точки M на диске в момент времени $t = 2 \text{ с}$:

$$\cup OM = \frac{1}{6} \pi R t^2 = \frac{1}{6} \pi R \cdot 2^2 = \frac{2}{3} \pi R \text{ м.}$$

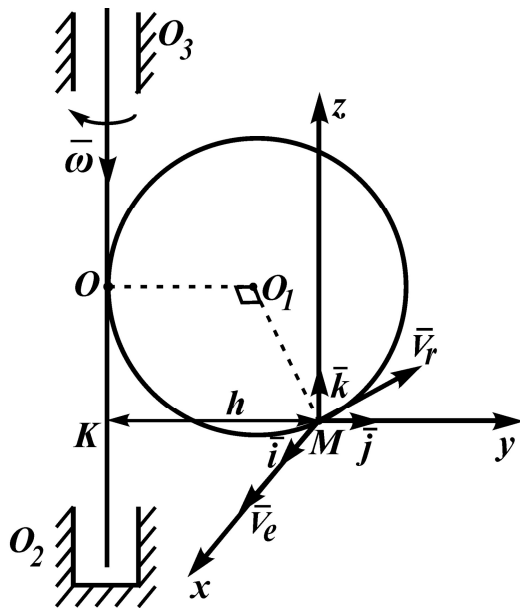


Рисунок 3.6

Центральный угол

$$\angle OO_1M = \frac{2}{3} \pi = 120^\circ \text{ (рисунок 3.6).}$$

В относительном движении закон движения задан естественным способом, поэтому скорость определяется как производная его дуговой координаты и направлена по касательной к траектории относительного движения в плоскости диска:

$$V_r = \frac{d OM}{d t} = \frac{2}{3} \pi R t;$$

$$t = 2 \text{ с}, \quad V_r = \frac{2}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot 2 = 2,09 \text{ м / с.}$$

Переносное движение в данном случае – вращение вокруг неподвижной оси O_2O_3 , расстояние до которой от точки M равно KM .

$$KM = h = R + R \sin 30^\circ = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} \cdot 0,5 = 0,75 \text{ м};$$

$$V_e = \omega \cdot h = \pi t^2 \cdot h = 3,14 \cdot 2^2 \cdot 0,75 = 9,42 \text{ м / с.}$$

По направлению вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ определяем, что при вращении вокруг оси O_2O_3 точка M движется к нам, то есть вектор $\bar{V}_e$ перпендикулярен плоскости диска и для выбранной системы отсчета $Mxyz$, скрепленной с диском, направлен по оси Mx .

Абсолютная скорость в нашем примере определяется как геометрическая сумма векторов $\bar{V}_e$ и $\bar{V}_r$: $\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r$, численная величина:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{2,09^2 + 9,42^2} = 9,65 \text{ м/с}.$$

Спроецировав векторную сумму на выбранные оси координат, получим проекции абсолютной скорости на эти оси:

$$V_x = V_e = 9,42 \text{ м/с};$$

$$V_y = V_r \cos 30^\circ = 2,09 \cdot 0,87 = 1,82 \text{ м/с};$$

$$V_z = V_r \sin 30^\circ = 2,09 \cdot 0,5 = 1,045 \text{ м/с}.$$

Направление вектора скорости определяют направляющие косинусы, то есть углы, которые вектор скорости составляет с выбранными осями:

$$\cos\left(\hat{\bar{V}} \hat{i}\right) = \frac{V_x}{V} = \frac{9,42}{9,65} = 0,976, \quad \alpha = 12^\circ 30';$$

$$\cos\left(\hat{\bar{V}} \hat{j}\right) = \frac{V_y}{V} = \frac{1,82}{9,65} = 0,188, \quad \beta = 79^\circ 10';$$

$$\cos\left(\hat{\bar{V}} \hat{k}\right) = \frac{V_z}{V} = \frac{1,045}{9,65} = 0,108, \quad \gamma = 83^\circ 50'.$$

В данном примере и переносные и относительные движения точки M – криволинейные, поэтому абсолютное ускорение определяется по формуле:

$$\bar{a} = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_k. \quad (3.6)$$

Составляющие ускорения определяются независимо друг от друга. В переносном движении точка M вращается вокруг оси O_2O_3 и движется по окружности радиуса h (рисунок 3.7). Нормальное ускорение в этом движении:

$$\begin{aligned} a_e^n &= \omega^2 h = (\pi t^2)^2 \cdot h = (3,14 \cdot 2^2)^2 \cdot 0,75 = \\ &= 118,32 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

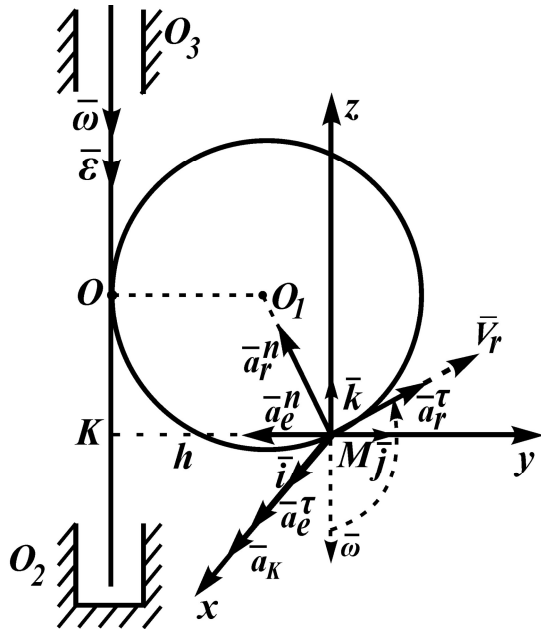


Рисунок 3.7

Этот вектор направлен от точки M к точке K (к оси вращения).

Касательное ускорение в переносном движении определится по формуле

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot h, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2\pi t.$$

Знак производной положителен, то есть вращение ускоренное и направления векторов $\bar{V}_e$ и $\bar{a}_e^\tau$ совпадают:

$$a_e^\tau = 2\pi t \cdot h = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 0,75 = 9,42 \text{ м/с}^2.$$

В относительном движении точка M движется по окружности радиуса R . Нормальное ускорение:

$$a_r^n = \frac{V^2}{R} = \frac{\left(\frac{2}{3}\pi R t\right)^2}{R} = \frac{4}{9}\pi^2 R t^2 = \frac{4}{9} \cdot 3,14^2 \cdot 0,5 \cdot 2^2 = 8,76 \text{ м/с}^2.$$

Этот вектор направлен от точки M к центру окружности – точке O_1 .

Касательное ускорение в относительном движении:

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}\pi R t\right) = \frac{2}{3}\pi R = \frac{2}{3} \cdot 3,14 \cdot 0,5 = 1,046 \text{ м/с}^2.$$

Производная от относительной скорости получена со знаком плюс, поэтому $\bar{a}_r^\tau$ совпадает по направлению с $\bar{V}_r$.

Кориолисово ускорение определяется по формуле

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &= 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r; \quad a_k = 2\omega_e V_r \sin 120^\circ = 2 \cdot \pi t^2 \cdot \frac{2}{3}\pi R t \cdot 0,866 = \\ &= 2 \cdot 3,14 \cdot 2^2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 0,866 = 45,54 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Вектор кориолисова ускорения должен быть перпендикулярен векторам $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$ (в нашем случае перпендикулярен плоскости чертежа). Если смотреть

навстречу вектору $\bar{a}_k$, то мы должны видеть поворот вектора $\bar{\omega}_e$ (мысленно перенесенного в точку M) на кратчайший угол до совмещения с вектором $\bar{V}_r$, происходящий против хода часовой стрелки. То есть в этом примере вектор $\bar{a}_k$ направлен по оси Mx к нам.

Направление кориолисова ускорения может быть определено и по правилу Жуковского. Проецируем вектор $\bar{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\bar{\omega}_e$ (на плоскость Mxy ; в данном примере эта проекция совпадает с осью My), и поворачиваем проекцию V_r на 90° в сторону вращения, то есть вектор $\bar{a}_k$ направлен к нам по оси Mx .

Для определения абсолютного ускорения проецируем векторное равенство (3.6) на оси координат:

$$\begin{aligned} a_x &= a_e^n \cos 90^\circ + a_e^\tau \cos 0^\circ + a_r^n \cos 90^\circ + a_r^\tau \cos 90^\circ + a_k \cos 0^\circ = \\ &= 0 + 9,42 \cdot 1 + 0 + 0 + 45,54 \cdot 1 = 54,96 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_y &= a_e^n \cos 180^\circ + a_e^\tau \cos 90^\circ + a_r^n \cos 120^\circ + a_r^\tau \cos 30^\circ + a_k \cos 90^\circ = \\ &= -112,32 + 0 + 8,76(-0,5) + 1,046 \cdot 0,87 + 0 = -121,79 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_z &= a_e^n \cos 90^\circ + a_e^\tau \cos 90^\circ + a_r^n \cos 30^\circ + a_r^\tau \cos 60^\circ + a_k \cos 90^\circ = \\ &= 0 + 0 + 8,76 \cdot 0,87 + 1,046 \cdot 0,5 + 0 = 8,14 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{54,96^2 + 121,79^2 + 8,14^2} = 133,86 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора ускорения определяется с помощью направляющих косинусов (см. формулы (3.7)):

$$\cos\left(\hat{\vec{a}} \hat{\vec{i}}\right) = \frac{a_x}{a} = \frac{54,96}{133,86} = 0,41, \quad \alpha_1 = 65^\circ 50';$$

$$\cos\left(\hat{\vec{a}} \hat{\vec{j}}\right) = \frac{a_y}{a} = -\frac{121,79}{133,86} = -0,91, \quad \beta_1 = 155^\circ 30';$$

$$\cos\left(\hat{\vec{a}} \hat{\vec{k}}\right) = \frac{a_z}{a} = \frac{8,14}{133,86} = 0,06, \quad \gamma = 86^\circ 30'.$$

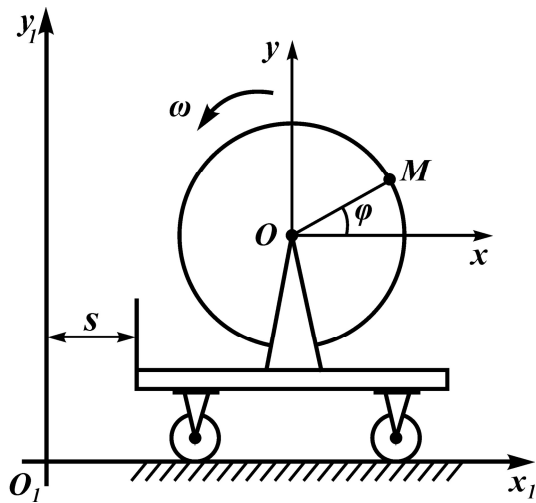


Рисунок 3.8

Пример 2

Платформа движется по горизонтальным направляющим по закону $s = 2t^2 \text{ м}$. На платформе установлен диск радиуса $R = 0,75 \text{ м}$, вращающийся вокруг оси перпендикулярной плоскости чертежа с угловой скоростью $\omega = 4t^2 \text{ рад/с}$. В момент времени $t = 2 \text{ с}$ определить скорость и ускорение точки M , находящейся в положении, показанном на рисунке 4.8, $\varphi = 30^\circ$.

Решение

В данном примере можно ввести неподвижную систему отсчета $x_1O_1y_1$ и подвижную xOy , скрепленную с платформой. Подвижная система отсчета движется поступательно вместе с платформой. По отношению к подвижной системе отсчета движется диск (вращается вместе с точкой M вокруг оси, проходящей через точку O). Движение точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпадает точка M , является переносным движением, вращение точки M вокруг точки O – относительное движение.

Скорость точки M определится по формулам:

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r, \quad V_e = \frac{ds}{dt} = 4t; \quad V_e = 4 \cdot 2 = 8 \text{ м/с};$$

$$V_r = \omega R = 4t^2 \cdot R, \quad V_r = 4 \cdot 2^2 \cdot 0,75 = 12 \text{ м/с}.$$

Спроецировав векторное равенство на оси неподвижной системы отсчета можно определить проекции абсолютной скорости на оси, величину скорости, направляющие косинусы.

$$V_{x_1} = V_e \cos 0^\circ + V_r \cos 120^\circ = 8 \cdot 1 - 12 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/с};$$

$$V_{y_1} = V_r \cos 30^\circ + V_e \cos 90^\circ = 8 \cdot 0 + 12 \cdot 0,87 = 10,44 \text{ м/с};$$

$$V = \sqrt{V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2} = \sqrt{2^2 + 10,44^2} = \sqrt{112,99} = 10,63 \text{ м/с}.$$

$$\cos\left(\hat{\vec{V}} \hat{\vec{i}}\right) = \frac{V_x}{V} = \frac{2}{10,63} = 0,188, \quad \alpha = 79^\circ 10';$$

$$\cos\left(\hat{\vec{V}} \hat{\vec{j}}\right) = \frac{V_y}{V} = \frac{10,44}{10,63} = 0,982, \quad \beta = 10^\circ 50'.$$

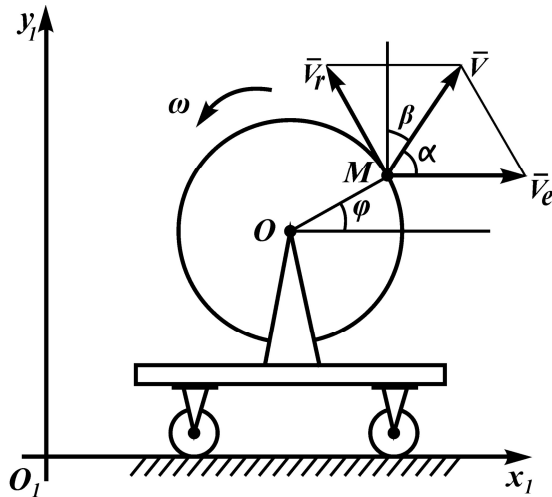


Рисунок 3.9

На рисунке 3.9 показаны переносная, относительная, абсолютная скорости точки M и углы, которые составляет вектор скорости с осями координат.

Ускорение точки определяется по формулам (3.3, 3.6, 3.7):

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r = \vec{a}_e + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau.$$

В данном примере при переносном поступательном движении ($\omega_e = 0$) кориолисово ускорение равно нулю.

$$a_e = \frac{d^2 s}{dt^2} = 4 \text{ м/с}^2, \quad a_r^n = \omega^2 R = (4t^2)^2 \cdot R = (4 \cdot 2^2)^2 \cdot 0,75 = 192 \text{ м/с}^2;$$

$$a_r^\tau = \varepsilon R = \frac{d\omega}{dt} \cdot R = 8t \cdot 0,75 = 8 \cdot 2 \cdot 0,75 = 12 \text{ м/с}^2.$$

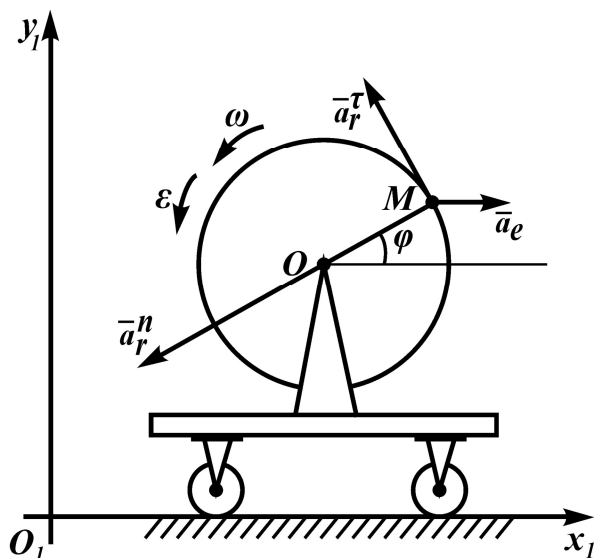


Рисунок 3.10

Проекции вектора абсолютного ускорения на оси:

$$a_{x_1} = a_e \cos 0^\circ + a_r^n \cos 210^\circ + a_r^\tau \cos 120^\circ = 4 \cdot 1 - 192 \cdot 0,67 - 12 \cdot 0,5 = -126,64 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{y_1} = a_e \cos 90^\circ + a_r^n \cos 120^\circ + a_r^\tau \cos 30^\circ = 0 - 192 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,67 = -87,96 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2} = \sqrt{126,4^2 + (-87,96)^2} = 153,99 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора ускорения:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a} \vec{i}}\right) = \frac{\vec{a}_{x_1}}{a} = -\frac{126,64}{153,99} = -0,822, \quad \alpha_1 = 214^\circ 40';$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a} \vec{j}}\right) = \frac{\vec{a}_{y_1}}{a} = -\frac{87,96}{153,99} = -0,571, \quad \beta_1 = 124^\circ 40',$$

где α_1 и β_1 – углы, которые вектор ускорения составляет с осями координат.

На рисунке 3.10 показаны составляющие полного ускорения точки M .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Яблонский, А.А., Никифорова, В.М. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 1998. – 768 с.
- 2 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – 10-е изд. – СПб.: Лань, 2008. – 736 с.
- 3 Сорокин, В.Н. Краткий курс теоретической механики: в теории, задачах и плакатах: учебник. – М.: Интер, 2005. – 600 с.
- 4 Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч.1. – М.: Наука, 1972. – 467 с.
- 5 Садыков, В.А., Аглиуллин, М.Х. Кинематический анализ плоского механизма / Учебно-методическое пособие для выполнения расчетно-графической работы. – Уфа.: Изд-во УГНТУ, 2007. – 31 с.
- 6 Аглиуллин, М.Х. Учебно-методическое пособие для практических занятий по теоретической механике / М.Х. Аглиуллин, В.А. Садыков, Э.Ш. Имаева, А.Л. Сухоносов. – Уфа.: РИО РУН МЦ МО РБ, 2009. – 40 с.